Math. A. 4
320

Digitized by Google

<36633524030017 S

<36633524030017

Bayer. Staatsbibliothek 33

4° Math. A.
320

Wallis

Math. A. 320

Johannis Walliſii, *SS*. Th. D.

GEOMETRIÆ PROFESSORIS *SAVILIANI* in Celeberrimâ Academiâ OXONIENSI,

DE SECTIONIBUS CONICIS,

R

Nova Methodo Expoſitis,

TRACTATUS.

OXONII,

Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impenſis THO. ROBINSON. *Anno* 1655.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MÜNCHEN

Clariſſimis Viris, & Mathematicis,

D. *SETHO WARD* S.T.D.
& D. *LAVRENTIO ROOK* M.A.

Publicis Aſtronomiæ Profeſſoribus; altero
Saviliano in Academia *Oxonienſi*,
altero *Greſhamenſi* in *Greſhamenſi*
Collegio *Londini*.

JOHANNES WALLIS *Geom. Prof.*
SAVILIANUS. S.

Quid novi ferat (Clariſſimi Viri) Libellus iſte, ab ipſo ſtatim quem præfert titulo innoteſcit. Nempe Sectiones Conicas (rem veterem) nova methodo tradit. Erat ſcilicet Conicorum traditio Veteribus jam olim cognita, Apollonio Pergæo vetuſtior, & quidem in methodum jam tum redacta; ut nec ipſe diffitetur Apollonius, & aliunde conſtat: (Nam Archimedes ipſe Apollonio antiquior, *Elementa Conica* ſæpius memorat:) ſed ab Apollonio, (cujus Conicorum libri quatuor ſuperſunt,) in meliorem formam redacta, & inſigniter aucta, (quod in cauſa fuiſſe credimus cur priora illa Elementa Conica perierunt.) Antiquiores enim illi, Coni ſolius Recti (quem ſolum Euclides definiverat) contemplationem aggreſſi, non aliam videntur ipſius ſectionem conſideraſſe quam quæ fit a plano quod ipſius lateri alicui rectum ſit ; quod propterea in Cono Rectangulo (eo nempe cujus oppoſita latera angulum in coni vertice rectum comprehendunt) oppoſito lateri maneret parallelum; in Cono Acutangulo, lateri oppoſito occurreret; in Cono autem Obtuſangulo, ab eo recederet. Atq; hinc curvas tribus illis ſectionibus emergentes, appellabant, Coni Rectanguli, Coni Acutanguli, & Coni Obtuſanguli, Sectionem; quibus etiam nominibus utitur Archimedes. Sed & propterea Coniſectionum illarum nominibus, ſolas erectas intelligebant, non item Scalenas; (ut & Diametri nomine, ſolum intelligebant Axem; &, Verticis Sectionis nomine, axis verticem;) ſectiones quippe Scalenas, ſive inclinatas, non aliter tractabant quam ut Erectarum portiones; (quod & de Conoidibus pariter intelligendum erit.) Apollonius autem, præter Conum Rectum, etiam Scalenum introduxit, (& forſan primus,) & propterea Coni definitionem ab Euclide traditam (ut quæ ſoli recto conveniebat) in aliam (quæ etiam Scalenis conveniat) immutavit. Sed neq; ſolam illam plani ſecantis poſitionem (quæ coni latus recte ſecat, hoc eſt, ad angulos rectos) ſed aliam quamlibet admiſit; adeoq; Coni cujuſlibet (ſive recti ſive ſcaleni) ſectionem quamlibet plano utcunq; poſito factam, conſideravit. Adeoq; & ſectionum nomina prius recepta neceſſe habuit immutare (quippe e Sectionibus tribus quamlibet invenit cuilibet cono ineſſe, prout planum ſecans alio atq; alio ſitu poſitum intelligatur,) quas igitur alii, Coni

Rectanguli, Coni Acutanguli, Coni Obtuſanguli, ſectionem, appellaverant; ille Parabolam, Ellipſem, Hyperbolam, dicendas voluit: quæ nomina ab illius prop: 11, 12, 13, libri primi, originem duxerunt; atq; hactenus a Geometris retinentur. Sed & eidem Sectioni plures Diametros, ineſſe voluit, prout hujus illiuſve coni ſectione facta intelligatur; quarum ſingulæ ſibi peculiares habent & vertices, & Ordinatim-applicatas, & Latera-recta. At fatendum interim eſt horum etiam non pauca, utut aliis nominibus, aliis antea, ſaltem Archimedi, innotuiſſe: hoc tamen diſcrimine, quod quæ *Coni Sectiones* (nempe inclinatæ) ab Apollonio dicuntur, eædem ab Archimede *Sectionis* (erectæ) *Portiones* dici videantur; (& ſimiliter de Conoidibus:) ut in ipſius libro de Rectanguli Coni Sectionis quadratura (cui *de quadratura parabolæ* recentiores nomen fecerunt,) & in libris *de Conoidibus & Sphæroidibus*, paſſim eſt videre.

Hæc autem Conicorum doctrina, quamvis ab Apollonio ſatis Geometrice tradita (unde & *Magni Geometræ* nomen eſt adeptus,) aſpera tamen adhuc manſit & difficilis, ut, qui illam auſus attingere, ſit e paucis unus. Unde & nimis neglecta fuit, tanquam inſuperabilis difficultatis plena: (Quod quidem eatenus obtinuit, ut ex libris Octo, quos ſcripſerat Apollonius, non niſi primi quatuor ad noſtras manus pervenerint;) Maxima quippe Geometrarum pars vel eo non accedebant plane, vel tanquam canis ad Nilum. Eamq; difficultatem quamvis aliquanto minuere conati ſint Midorgius, aliiq;, minime tamen ſuſtulerunt. Quam igitur pleriq; cane pejus & angue formidarunt, Conicorum Doctrinam, nos demulcendam ſuſcepimus & levigandam, ut deinceps non minus tractabilis evadat quam ipſa Euclidis Elementa; nec ſit cur quis in poſterum ipſius aggreſſum metuat. Quod quidem quouſq; præſtiterim, non eſt cur alios quam vos ipſos æquiores putem judices; qui pro ea qua polletis, ut in reliqua literatura, ita ſpeciatim in Matheſi peritia provinciam quam ſuſcepiſtis ornatis maxime.

Opus ipſum quod attinet; videbitis me, ſtatim ab initio, Cavallerii *Methodum Indiviſibilium*, quaſi jam a Geometris paſſim receptam, tam huic quam ttactatui ſequenti (qui huic gemellus eſt) ſubſternere; (ut multiplici figurarum inſcriptioni & circumſcriptioni, quibus in ἀπαγωγαῖς aliàs utendum ſæpius eſſet, ſuperſedere liceat:) ſed a nobis aliquatenus ſive emendatam ſive ſaltem immutatam: pro rectis numero infinitis, totidem ſubſtitutis parallelogrammis (altitudinis infinite-exiguæ;) ut et pro planis, totidem vel priſmatis vel cylindrulis: & ſimiliter alibi.

Schemata adhibui quam potui ſimplicia, ne intricatiores linearum ductus confuſionem inferant: & quidem iiſdem ubi fieri commode poſſet repetitis vel parum immutatis uti mallem quam ubiq; novis; quo magis fiant lectori familiaria. In quem etiam finem, iiſdem ut plurimum literis eadem (per totum fere tractatum) puncta deſignamus, utut ſchemata fuerint immutata; atq; iiſdem ſymbolis eaſdem deſignamus ubiq; quantitates: ſed neq; illa fortuito aſſumpta, ſed plerumq; cum delectu, ut ipſe vel literarum vel ſymbolorum intuitus rem deſignatam aliquatenus referat; quæ quamvis non-neceſſaria videri poſſit curioſitas, cum tamen & fantaſiæ & memoriæ adjuvandæ inſerviat, nonnullis forſan erit non ingrata, reliquiſq; ſaltem inoffenſa. In ſymbolis adhibendis, ſecuti ſumus partim D. *Oughtredum* noſtratem, partem D. *Carteſi-*

um (niſi velitis potius ut D. *Harriotum* noſtratem nominem, qui in eadem fere ſemita D. *Carteſio* præivit) nonnunquam utrumq; ; prout vel hujus vel illius vel utriuſq; notatio præſenti negotio explicando magis videbatur accommoda. Demonſtrationes paſſim ex Arithmeticæ ſymbolicæ calculo petendas duxi, ut quæ brevitati ſimul atq; perſpicuitati inſerviunt maximè, quaſq; non minus legitimas eſſe quam quæ vario linearum implexu fiunt non eſt cur quiſquam dubitet. In toto deniq; operis decurſu ea brevitate ſtuduimus omnia præſtare quæ perſpicuitati non officiat.

Prolixum itaq; de Conicis tractatum non exhibemus; adeoq; multa ab aliis tradita, nos conſulto omiſimus, quæ tamen, ſi opus videbitur, poſſit quilibet non magno negotio ſupplere, vel ex noſtris deducere. Poſt enim præcipua fundamenta tradita, non erit difficile reliqua quaſi totidem inde conſectaria adjungere. Eritq; fortaſſe tractatus iſte vel ipſa brevitate gratior, quam ſi minutiora ſectando factus eſſet prolixior. Quicquid ſit, veſtro illud duxi aliorumq; Mathematicorum judicio permittendum. *Valete.*

Index ad Tractatum ſequentem.

Proœmium.

PROP. PARS I.

1 *De Figuris planis juxta indiviſibilium methodum conſiderandis.*
2 *De Triangulo.*
3 *De Area Trianguli*
4 *De Triangulis æque-altis*
5 *De Coni*
6 *De Pyramide*
7 *De Cono Sectione*
8 *De Parabola, ſectione Coni facta*
9 *De Conoide & Pyramidoide Parabolico*
10 *De Conoideos & Pyramidoideos Parabolici Sectione*
11 *De Cuneo Parabolico*
12 *De Parabolæ Latere-recto*
13 *De Ellipſi, Sectione Coni facta*
14 *De Elliptico Pyramidoide & Conoide (ſeu Sphæroide) & Cuneo*

15 *De Conoideos & Pyramidoideos Elliptici ſectione*
16 *De Ellipſis Latere-recto*
17 *De Hyperbola, Sectione Coni facta*
18 *De Hyperbolico Conoide, Pyramidoide, & Cuneo*
19 *De Conoideos & Pyramidoideos Hyperbolici ſectione*
20 *De Hyperbolæ Latere-recto.*

PARS II.

21 *De Paraboba abſolute conſiderata.*
22 *Corollaria.*
23 *De recta Parabolam Contingente.*
24 *De Parabolæ Diametris*
25 *Effectiones Geometricæ.*

26 De Ellipſi abſolute conſiderata
27 De Ellipſis Diametro-tranſverſa & verticibus oppoſitis
28 Corollaria
29 De Ellipſis Diametris Conjugatis
30 De recta Ellipſin Contingente
31 De Ellipſeos Diametris
32 Effectiones Geometricæ
33 De Hyperbola abſolute conſiderata
34 De Diametro tranſverſa & Hyperbolis Oppoſitis
35 Corollaria
36 De rectâ Hyperbolam contingente
37 De Hyperbolæ Diametris
38 Effectiones Geometricæ
39 De Hyperbolæ Aſymptotis rectis
40 De Hyperbolis Aſymptotis
41 De Hyperbolæ Diametris Conjugatis
42 De Hyperbolis Conjugatis
43 De Syſtemate Hyperbolico
44 Ellipſeos & Hyperbolæ Comparatio.

APPENDIX.

45 De Paraboloide Cubicali
46 De recta ipſum contingente
47 De ipſius Diametris
48 De Area Paraboloidis; Conoidis item vel Pyramidoidis ipſi accommodati
49 De Paraboloidibus aliis
50 De Ellipſoidibus & Hyperboloidibus.

De Sectionibus Conicis

TRACTATUS.

Proœmium.

QUUM Sectionum Conicarum (quæ dici ſolent) doctrinam (prout vulgò tradi conſuevit) ſatis obſcuram animadverteram, atq; perplexis admodum Demonſtrationibus involutam: Totum illud negotium paulo attentiùs apud me perpendendum ſtatui; ut ſiquâ poſſem arte rem ſatis intricatam quadantenus extricatiorem darem. Quod & in ſequentibus (Divino favente auxilio) me aliquatenus aſſequutum eſſe confido.

In illum finem, *Conum* ipſum primò (unde, quæ dicuntur, *Coni-ſectiones* ortum trahere exiſtimantur) accuratius paulo conſiderandum duxi; ut inde Coniſectionum originem repeterem, earúmq; affectiones tanquam a vero fonte deducerem; Methodi ſaltem quâ & Apollonius Pergæus, *Magnus Geometra* dictus, & poſt illum tam Veteres quam Recentiores incedunt, fontes apperirem; qui in ipſis Demonſtrationibus,

bus non ita ſemper eminent ut ſtatim perſpiciantur, & fortaſſis etiam nonnunquam ſtudio occultantur. Non tamen ea methodo totam Coni-ſectionum doctrinam proſequor; ſed eouſq; ſaltem procedo donec primarias atq; eſſentiales earum affectiones detexerim, ut ipſarum natura atq; eſſentiales characteres innoteſcant, ut inde reliquæ deinceps affectiones calculo deduci poſſint; (Quod etiam in ſequentibus factum eſt.) Atq; hoc quidem præſtitum eſt in propoſitionibus, ſive Sectionibus viginti primoribus. Inſertis interim obiter nonnullis de Conoidibus & Pyramidoidibus (quatenus ſine nimia digreſſione commodè fieri potuit;) & præmiſſis aliquot quaſi Lemmatibus neceſſariis.

Deinde, ſepoſitis quæ a Cono dependent menſuris, aliiſq; in eorum locum ſubſtitutis, quæ Coni-ſectionem ubiq; (ſive in Cono, ſive extra Conum,) comitentur; Coni-ſectiones (vulgò dictas) Cono liberatas atq; exemptas, abſolutè (nullo ad Conum reſpectu habito) conſiderandas ſuſcipio, (totam tractationem quaſi de novo exorſus,) tanquam totidem lineas (ſive figuras) curvas in plano deſcriptas, quæ vel Sectione Coni, vel etiam aliis modis infinitis effici poſſent. Neq; enim Parabola, Ellipſis, aut Hyperbola, a Cono ſecto magis neceſſariò dependent, quàm vel Peripheria vel etiam Triangulum, (quæ quidem & ſecto Cono, & aliis mille modis produci poſſunt:) Ideóq; ſimpliciùs atq; univerſaliùs tradi & poſſunt & debent.

Deniq;, Appendicis loco, ſpecimen exhibere libuit ampliandæ Curvarum doctrinæ; (ſicut &, in progreſſu, Conoideωn & Pyramidoideωn, tam erectorum quàm ſcalenorum, quod tamen nemo, quod ſciam, antea fecerat, doctrinam attigeram; cum antea Conoideωn non niſi rectorum, nec quidem Pyramidoideωn omnino, ratio ulla habita fuerit:) adjunctâ ad calcem novâ, nec ab ullo (credo) antehac tentatâ Paraboloideωn ſpeculatione.

Atq; hæc ſunt quæ in ſequentibus exſpectet Lector φιλομαθὴς, brevi quantum potui methodo tradita, nec tamen ea propter obſcuritate involuta. Ideóq; prolixam, quam nonnulli affectare videntur, numeroſæ Lemmatum & Propoſitionum ſeriei, linearibus ubiq; demonſtrationibus, ſat quidem longis nonnunquam atq; involutis, comprobatorum, pompam diffugiens; ipſas ut plurimum non modò ἐκθέσεις, ſed & ἀποδείξεις (ubi id levi commonitione tanquã in tranſitu præſtari poſſit, nec Propoſitionis ſeriem nimis conturbet) ipſis Propoſitionibus inſerui, brevitati ſimul & perſpicuitati conſulens: Demonſtrationibus etiam (eâdem de cauſa) potius ex Arithmetico calculo petitis (Arithmeticam *ſpecioſam* intellige) rem agens, quàm linearibus; cùm illæ nec minùs ſcientificæ ſint, & magis perſpicuæ, ſed et ſimpliciores ſunt atq; magis univerſales, nec quiſquam eſt (quod ſciam) qui Demonſtrationes Arithmeticas in Geometria admittendas negaverit; & quidem (præterquam ubi de Angulis aut Inclinationibus agitur, alióve aliquo ſitu locali, aut quæ immediatè hinc dependent,) non video quorſum linearibus ductibus in demonſtrando admodum opus ſit, cùm ea omnia quæ ex Rationibus ſive Proportionibus ordinandis, alternandis, invertendis, convertendis, componendis, dividendis, addendis, auferendis, &c. dependent, non magis Geometrica ſint quàm Arithmetica, ne dicam potius purè Arithmetica, quanquam (ut Arithmetica omnia) tam rei Geometricæ quàm aliis etiam diſciplinis Mathematicis ſæpiſſimè immiſceantur.

His Præmonitis, rem ipſam aggredior.

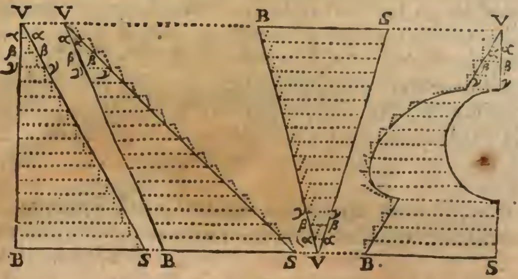
PARS PRIMA.

PROP. I.

De Figuris planis juxta Indiviſibilium methodum conſiderandis.

SUppono in limine (juxtâ Bonaventuræ Cavallerii *Geometriam Indiviſibilium*) Planum quodlibet quaſi ex infinitis lineis parallelis conflari: Vel potiùs (quod ego mallem) ex infinitis Prallelogrammis æquè altis; quorum quidem ſingulorum altitudo ſit totius altitudinis $\frac{1}{\infty}$, ſive aliquota pars infinite parva; (eſto enim ∞ nota numeri infiniti;) adeóq; omnium ſimul altitudo æqualis altitudini figuræ.

VTrovis autem modo res explicetur (ſive per infinitas lineas parallelas, ſive per infinita parallelogramma æquè alta infinitis illis lineis interjecta) eodem res redibit. Nam Parallelogrammum cujus altitudo ſupponitur infinite parva, hoc eſt, nulla, (nam quantitas infinite parva perinde eſt atq; nonquanta,) vix aliud eſt quàm linea. (In hoc ſaltem differunt, quòd linea hæc ſupponitur dilatabilis eſſe, ſive tantillam ſaltem ſpiſſitudinem habere ut infinitâ multiplicatione certam tandem altitudinem ſive latitudinem poſſit acquirere, tantam nempe quanta eſt figuræ altitudo.) Nos igitur deinceps (partim quod ille mos loquendi in Cavallerii methodo de *Indiviſibilibus* videatur obtinuiſſe, partim etiam ut brevitati conſulamus) Linearum potiùs quàm Parallelogrammorum nomine partes illas figurarum infinite exiguas (ſive altitudinis infinite exiguæ) nonnunquam appellabimus, quando ſaltem determinatæ altitudinis conſideratio non habetur; Ubi autem determinatæ altitudinis inſtituetur conſideratio (quod aliquando fiet) exiguæ illius altitudinis eouſq; ratio habenda erit, ut ea infinities multiplicata totam figuræ altitudinem ſupponatur adæquare.

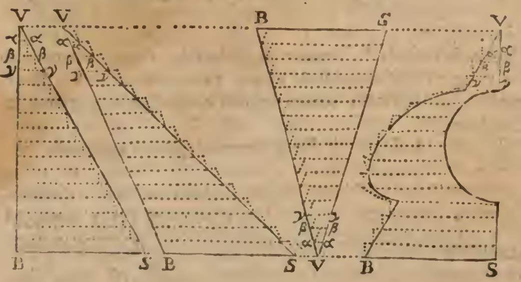


Quod autem de Lineis & Parallelogrammis perinde nominandis, dictum eſt, intelligendum etiam erit de Circulis & Cylindrulis, vel etiam de Planis quibuſvis & Priſmatibus ſuper illa plana conſtitutis: dummodo ſupponantur tantam ſive craſſitiem ſive altitudinem habere quanta eſt $\frac{1}{\infty}$ *altitudinis illius figuræ quam conſtituunt.* Nam Cylindrus nullius altitudinis, vel infinite exiguæ, quid aliud, eſt quam Circulus? & Priſma, altitudinis vel nullius vel infinite exiguæ, perinde atq; Planum tractari poterit. Atq; hoc jam ſtatim ab initio monendum eſſe duxi, ne ſæpiùs illud deinceps repetere neceſſe foret.

PROP. II.

De *Triangulo.*

SI Triangulum rectâ, baſi parallelâ, ſecetur, erit abſciſſum Triangulum ſecto ſimile; & propterea latera habebit proportionalia (ut notum eſt.) Adeóq; , ſi Triangulum quodvis V B S, rectis quotcunq; αα, ββ, γγ, &c. baſi B S parallelis, & æqualiter ab invicem diſſitis, ſecetur; quæ propterea Crurum utrumvis (adeóq; & utrumq;) dividant in ſegmenta æqualia, (& propterea etiam totum Triangulum in ſegmenta æquè-alta:) erunt illæ rectæ αα, ββ, γγ, &c. Arithmeticè proportionales: (ſunt enim inter ſe αα, ββ, γγ, &c. ut Vα, Vβ, Vγ, &c. hoc eſt, ut 1, 2, 3, &c, propter æquales exceſſus Vα, αβ, βγ, &c.) Ideóq; ſi rectæ illæ ſupponantur numero infinitæ, erit omnium ſeries, (hoc eſt, totum Triangulum, per prop. præced.) aggregatum rectarum numero infinitarum Arithmeticè proportionalium, quarum minima eſt punctum V (verticis nimirum) maxima verò eſt B S baſis Trianguli.



Atq; idem continget ſi infinitis illis rectis ſupponamus totidem Parallelogramma in eodem plano interjici, quorum ſingulorum altitudo ſit $\frac{1}{\infty}$ altitudinis Trianguli: Erunt ſcilicet & illa Arithmetice proportionalia. Cùm enim æque-alta ſint, ſunt & baſibus proportionalia.

Hæc autem omnia Parallelogramma ſimul ſumpta, figuram conſtituent Triangulo illi ſive inſcriptibilem ſive circumſcriptibilem,(cùm omniũ baſes ſupponantur Triangulo aptari:)quò autem plura ſunt(in ejuſmodi figurá inſcripta vel circũſcripta) Parallelogrãma,eò minori ſive exceſſu ſive defectu differt figura illa a Triangulo cui adſcribitur;adeóq; ,cùm ſupponantur infinita,erit differentia illa infinite exigua,hoc eſt,nulla;atq; propterea ſupponenda ea figura ſic adſcripta (ex Parallelogrammis infinitis Arithmetice proportionalibus conflata) Triangulo æqualis, ſeu potiùs eadem : Eadem quidem lege qua Polygonum regulare infinitorum laterum , (ſive inſcribi ſupponatur ſive circumſcribi) pro Circulo haberi ſolet,

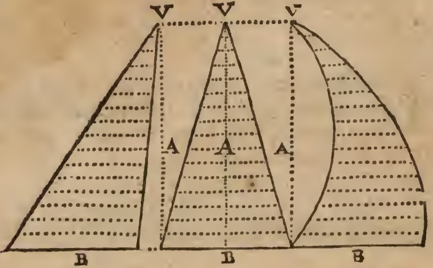
Quod ſi quiſpiam ſit qui noluerit hoc concedere, poterit ille notiſſima methodo Apagogica cogi : multiplicatis nempe eouſq; Parallelogrammis, ut differentia tandem quavis aſſignatâ quantitate minor ſit. Ego verò ejuſmodi ἀπαγωγαῖς ſuperſedendum eſſe exiſtimo , partim ne Lectori nauſeam crearem ejuſmodi cramben ſæpiùs iterando, partim quia nemo eſt in Mathematicis paulò exercitatior,qui non poterit (ſi ipſi opus eſſe videatur, tantiq; ſuperſit otii) ſupplere, cùm ea Methodus demonſtrandi tam apud Veteres quam Recentiores paſſim occurrat.

Quod autem de Triangulo jam dictum eſt,illud nempe figuræ ex infinitis Parallelogrammis conflatæ (ſive inſcriptæ ſive circumſcriptæ) æquale eſſe, ſeu potius eandem figuram; intelligendum erit de quâvis aliâ figurâ planâ; cùm eadem ſit in omnibus demonſtrandi ratio. *Nec quidem Planis ſolummodo, ſed & figuris Solidis illud conveniet : ſi nempe pro Parallelogrammis ſubſtituamus Priſmata* : (qua voce etiam Cylindrulos comprehendi volo , aut etiam ejuſmodi quaſvis figuras intèr parallela plana ſimilia, ſive rectilinea ſint ſive curvilinea ſive mixta, æquabiliter poſitas; ne longis verborum ambagibus utendum ſit.) Atq; hoc ſemel moneo , ne quis deinceps novas Demonſtrationes exſpectet, quoties idem de aliis figuris dicendum occurret.

PROP. III.

De Areâ Trianguli.

CUm Triangulum conſtet ex infinitis ſive lineis, ſive Parallelogrammis, Arithmeticè proportionalibus, a puncto inchoatis & ad baſin continuatis, (ut patet ex jam dictis:) Erit Area Trianguli æqualis Baſi in Altitudinis ſemiſſem ductæ.



Eſt enim notiſſima apud Arithmeticos regula; *Summam Arithmeticæ progreſſionis, ſive omnium quotcunq; terminorum aggregatum, adæquari aggregato extremorum in ſemiſſem numeri terminorum ducto.* Adeoq;, ſi terminus minimus ſupponatur O, (prout hîc ſupponitur, tantundem enim valet punctum in magnitudine atq; o Ciphra in numero;) idem erit extremorum aggregatum atq; ipſe terminus maximus. Altitudinem verò figuræ, pro numero terminorum in Progreſſione, ſubſtituo, hac de cauſa, Quoniam cū numerus terminorum ſupponatur ∞, erit omnium longitudinum aggregatum $\frac{\infty}{2}$ Baſis, (quia Baſis jam eſt extremorum aggregatum;) cùm autem cujuſlibet (lineæ vel parallelogrammi) craſſities ſive Altitudo ſupponatur $\frac{1}{\infty}$ Altitudinis trianguli, li, & in illam tota longitudinum ſumma ducenda eſt; adeoq; $\frac{1}{\infty}$ A in $\frac{\infty}{2}$ B erit area. Eſt autem $\frac{1}{\infty} A \times \frac{\infty}{2} B = \frac{1}{2} AB$. Adeò ut A (figuræ altitudo) non ſolum longitudinum numerum, ſed eundem in communem omnium altitudinem ductum, exhibeat; quæ quidem communis altitudo tantò minor ſupponenda eſt, quanto termini ſeu longitudines ſunt plures.

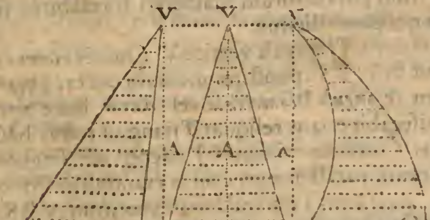
Notandum autem eſt, *Hoc non ſolummodo in veris Triangulis (rectilineis) valere; ſed & idem pariter evenire quamvis crura ſint vel curvilinea, vel quomodocunq; a rectitudine diſtorta, modo rectæ omnes baſi parallelæ ſint ſuis a vertice diſtantiis proportionales, adeoq; inter ſe Arithmeticè proportionales.* Ejuſmodi vero figuram, cum ſit Trianguli inſtar, *Triangulum diſtortum, luxatum*, aut *deformatum*, licet appellare.

PROP. IV.

De Triangulis æquè altis.

HInc ſequitur; Triangula ſuper æqualibus baſibus æquè-alta, (ſive rectangula ſint ſive obliquangula, ſive item ſint æquicrura ſive ſcalena, ſive quocunq; modo luxata,) eſſe inter ſe æqualia:

Cùm enim in calculo nulla angulorum ſitûsve habeatur



ratio, ſed Baſis ſolummodo & Altitudinis; modo de his conſtet, conſtabit etiam de area Trianguli.

Quod autem de Æqualitate dictum eſt, facile poteſt etiam Proportionalitati accommodari. Quod & ſæpius deinceps erit intelligendum.

Has vero duas de Area Trianguli Propoſitiones, non ideo hic inſerendas judicavi, acſi novum quid aut inauditum in ſe contineant, (quis enim hæc neſcit?) ſed ut via ſternatur conſimili argumentationi in aliis figuris ſive planis ſive ſolidis. *Si enim æquales ſint tam baſes quam altitudines, omniaq; intermedia (ſive Parallelogramma ſive Priſmata) eâdem ratione vel creſcant vel decreſcant, æquales etiam erunt figuræ quamvis earum altera erecta ſit altera vel inclinata vel quocunq; modo luxata.* Nam cùm infinitæ partes unius infinitis partibus alterius ſigillatim æquentur, (quanquam fortaſſis in alio ſitu reperiantur,) erunt & aggregata æqualia.

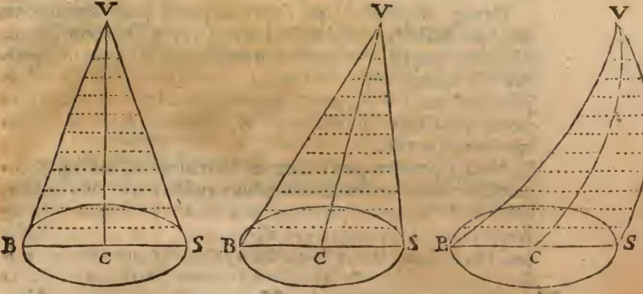
Atq; hoc quidem ſemel & univerſaliter monſtraſſe ſufficiat, ne varias deinceps propoſitiones particulares, citra neceſſitatem, multiplicare cogar.

PROP. V.

De Cono.

SI infinitæ Rectę parellelę ex quibus conflari ſupponitur Triangulum, fiant totidem Circulorum parallelorum diametri; formabitur figura ſolida qui *Conus* dicitur.

Rectáq; a Trianguli vertice V (qui & *Coni Vertex* eſt) ad Baſis B S punctum medium ducta, puta V C, (quam *Trianguli Diametrum* vel *Axem* libet appellare) biſecabit etiam reliquas Trianguli rectas baſi parallelas (totúmq; triangulū) adeóq; per ſingulorum circulorum parallelorum centra tranſibit; erítq; propterea *Axis Coni*; Triangulúmq; expoſitum, V B S, per Axem Coni tranſiens, ipſum Conum ejúſq; parallelos Circulos biſecabit: Circulúſq; ille cujus diameter eſt baſis Trianguli, *Coni Baſis* dicetur.



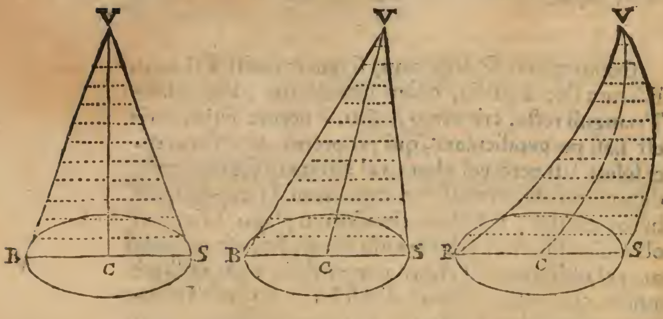
Conus autem ſic formatus, ſi tam expoſiti Trianguli Crura ſint æqualia, quàm circulorum plana plano Trianguli recta, erit *Conus Rectus*, (utpote cujus Axis eſt Baſi perpendicularis, qui propterea *Axis Rectus* dici ſolet;) ſi verò vel altera vel alterutra illarum conditionum deſit, (puta ſi vel expoſitum Triangulum ſit inæquicrurum, vel plana circulorum plano Trianguli obliquè inſiſtant,) erit *Conus Scalenus*, hoc eſt inclinatus vel obliquatus, (cujus nempe Axis *Baſi* obliquè inſiſtit, atq; *Axis Obliquus* dici ſolet:) ſi vero Triangulum Diſtortum fuerit, fiet & *Conus Diſtortus*, non verus Conus.

Prout autem Triangulum poteſt (productis infra baſin cruribus) in infinitum continuari; ita & Conus pari modo continuandus ſupponitur.

Atq; etiam, ſicut (continuatis, poſt decuſſationem, Trianguli cruribus ſupra verticem) aliud formari poteſt κατὰ κορυφὴν Triangulum (quod *Triangulum oppoſitum* appellamus,) ita et *Oppoſitum Conum* formari ſupponendum eſt.

Pleraq; in propoſitione (præterquam quod Definitiones ſint) per ſe ſatis patent, nec ulteriori egent Demonſtratione. Unicum opus eſt, ut oſtendam, nempe *Figuram ſolidam ſic formatam,* (ſi Conum Diſtortum eximas,) *talem Conum eſſe qualem definit Apollonius* : Vel, quod idem eſt, Parallelos circulos coni noſtri parallelis Circulis coni Apollonii congruere. Quod quidem verum eſt.

Nam (propter paralleliſmum Circulorum, adeóq; & eorum Diametrorum in eodem plano exiſtentium, iſtaſq; Diametros diſtantiis a vertice proportionales,) ſi latus alterutrum, expoſiti Trianguli per axem, puta V B circumferatur ſecundum circuli unius (puta Baſis) Peripheriam tranſibit etiam per Peripherias reliquorum, Radiorum extremitates lambens (qui ubiq; ſunt diſtantiis a vertice proportionales & baſis radio paralleli, adeóq; , durante tota circumductione, triangulo quod Axe trianguli expoſiti, recta circumducta, & baſis radio comprehenditur, ubiq; accommodatur) totámq; figuram deſcribet.



deſcribet: Quæ eſt Apollonii conſtructio Coni. Conus igitur a nobis formatus idem eſt cum Apollonii Cono: Quod erat oſtendendum.

Atq; hinc etiam ſequitur, *A vertice ad quodvis ſuperficiei Conicæ punctum rectam duci poſſe.*

Recordandum interim eſt, (quod ſupra univerſaliter monuimus) ſicut lineis trianguli, ita planis Coni, aliqualem craſſitiem concedendam eſſe, quanta nempe eſt $\frac{1}{\infty}$ altitudinis Coni: vel, quod idem eſt, Circulorum appellatione, cylindrulos numero infinitos, tantæ quidem altitudinis, ſuper circulis illis conſtitutos intelligendos eſſe; qui igitur ſolidum ex infinitis cylindrulis cono vel inſcriptum vel circumſcriptum ſupponuntur conſtituere; quod ſolidum idem eſſe cum cono, eodem argumento concluditur quo uſi ſumus de Triangulo, Prop. 2.

Coni autem *Altitudo*, menſuratur perpendiculo a Vertice ad planum Baſis demiſſo; adeóq; eadem eſt cum altitudine Trianguli, ſi circuli ſint triangulo recti, (erit enim perpendiculum illud in ipſo trianguli plano, adeóq; ipſius etiam baſi, ſaltem productæ, perpendicularis, ejus altitudinem metiens;) ſin ſecus, minor erit; tunc enim perpendiculum ad baſin trianguli demiſſum, erit ad Coni baſin obliquum, adeóq; majus perpendiculo altitudinem Coni metiente.

Notandum tamen inſuper eſt, Conum formari poſſe, non modo ſi expoſiti Trianguli rectæ parallelæ, ſint circulorum Diametri, verum etiam ſi circulis (vel quidem ſimilibus Ellipſibus) alio quovis modo ſimiliter aptentur; (quod, ſi opus ſit, facile eſt demonſtratu; nos autem obiter tantùm monemus:) Verùm, eo caſu, Triangulum illud non neceſſario per Axem Coni incedet, neq; ea omnia conſequentur ſymptomata quæ hinc dependent.

Si verò, pro Circulis, ſubſtituantur totidem Figuræ rectilineæ, (aliæve vel curvilineæ vel miſtæ, præter circulos & Ellipſes,) non quidem Conus, ſed ſaltem *Pyramis* emerget: Cui & ea omnia facilè accommodari poſſunt (mutatis mutandis) quæ de Cono (hoc eſt, Pyramide rotundâ) diximus. Pyramidis autem nomen hic latiori ſenſu accipiendum volo, quàm ut ſolis figuris rectilineas baſes habentibus conveniat; ita nempe ut baſes planas quaſcunq; admittat, (ſicut & de Priſmate ſupra dictum eſt ad Prop. 2.) ne ſcilicet longis verborum Ambagibus utendum eſſet. Adeóq; ‥ ‥

PROP. VI.

De Pyramide.

P*yramidis* voce (ſub quâ & Conum comprehendo) intelligo Figuram ſolidam ex infinitis planis circa eundem Axem rectilineum ordinatim-poſitis conflatam; quorum omnium craſſities ſupponuntur invicem æquales (nempe $\frac{1}{\infty}$ altitudinis figuræ ſolidæ,) diametri verò (vel homologa latera, aut etiam rectæ quævis ſimiliter poſitæ) diſtantiis a vertice proportionales; adeóq; ipſa plana in duplicatâ ratione diſtantiarum a vertice. (ſicut & *Priſmatis* nomine intelligo ejuſmodi planorum aggregatum invicem æqualium.)

Si autem Pyramis plano per verticem ſecetur; manifeſtum eſt plana ſimilia (parallela) ſimiliter ſecari; communes ergo ſectiones (planorum ſecantis & ſectorum) ſunt infinitæ rectæ arithmetice proportionales (nempe, in ſubduplicata ratione figurarum, hoc eſt, in ratione diſtantiarum a vertice) adeoq; omnium aggregatum erit triangulum; per Prop. 2.

Axem vero Pyramidis (ut & Priſmatis) appello, Lineam a vertice ductam, ſimilium planorum parallelorum omnium centra conjungentem. *Plana* vero ad Axem *ordinatim poſita*, appello, quæ parallela, & ſimilia ſimiliterque poſita, centra habent in axe.

Si verò, vel quòd triangulum, unde formari ſupponitur Pyramis, non ſit rectilineum, (ſed curvilineum, ſeu quocunq; modo deformatum,) aut ob aliam quamlibet rationem, Planorum, centra non ſint in câdem rectá; vel ipſa plana circa eundem

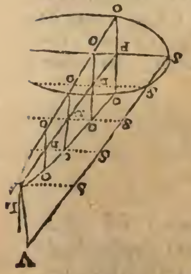
dem Axem non ſint ſimiliter polita, (ſed ſpirali putà, vel alio quovis modo diſtorta;) modò interim plana ſint ſimilia & æqualiter craſſa, debitamq ad invicem rationem retineant; *Pyramis luxata, diſtorta*, vel *deformata* dici poteſt. (Quæ etiam de Priſmate, aliiſq; figuris ſolidis, pariter intelligenda ſunt) Lineaq; omnium centra conjungens (ſi recta non ſit) *Axis diſtortus* dici poteſt.

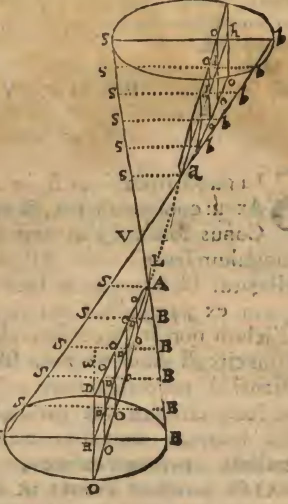
PROP. VII.

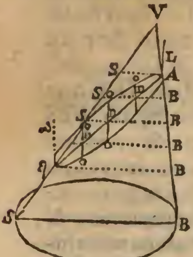
De Coni Sectione.

SI a puncto quovis, ut A, in Trianguli V B S (per Axem coni incidentis, & circa quod ſupponitur Conus formari) utrovis Crure, recta ducatur Triangulum ſecans (puta AP, AE, AH;) ſuper quam intelligatur Planum plano Trianguli ita inſiſtere, ut aliquem ex parallelis Coni circulis (ſi ſaltem ipſis parallelum non ſit) ſecet ſecundum rectam OO, quæ ſit iſtius circuli diametro, puta BS, (in triangulo VBS exſiſtenti) perpendicularis, (adeoq; & reliquos quos ſecat circulos iſti parallelos ſecet ſecundum rectas ipſorum diametris in eodem triangulo exſiſtentibus perpendiculares, quæ propterea & ipſi O O parallelæ erunt; ut ſtatim demonſtrabitur:) communis Sectio ſuperficierum Coni, planiq; ſecantis (puta O A O,) *Sectio Conica* vel *Coni-Sectio*, dici ſolet; Et quidem vel Parabola, vel Ellipſis, vel Hyperbola: Nempe *Parabola*, ſi recta ſic ducta ſit reliquo cruri parallela (adeoq; nuſquam ipſi, quantumvis utrinq; producatur, occurrens) ut A P: *Ellipſis* vero, ſi recta ſic ducta ad crus oppoſitum vergat, (adeoq; ipſi, ſaltem producto, ſit infra verticem occurſura,) ut AEa: *Hyperbola* deniq; ſi recta ſic ducta ab oppoſito crure recedat, ut AH,

(quæ igitur ex contraria parte producta oppoſito cruri ſupra verticem continuato, occurret, puta in a.)







Punctum autem A, coni-Sectionis *Vertex* dicitur; & quidem A, a, (in Ellipſi & Hyperbola) *Vertices oppoſiti.* Rectæq; AP, AE, AH, coni-ſectionum *Diametri*, (nempe AP Parabolæ, AE Ellipſis, AH Hyperbolæ:) ipſaq; A a (Ellipſeos vel Hyerbolarum) *Diameter tranſverſa*: (idem nempe planum quod Hyperbolam in uno aliquo cono efficit, cum etiam ad Oppoſitum Conum pertinget, *Oppoſitam Hyperbolam* ibidem efficit.) Rectam autem OO, reliquaſq; ipſi in eadem Con-ſectione parallelas, (totidem parallelis in Cono circulis, & Coni-ſectioni communes,) *Ordinatim-ſubtenſas*, ſive *Ordinatim inſcriptas*, appello : quæ, cum ſint circulorum diametris perpendiculares, (ut conſtructio poſtulat,) ab ipſis biſecantur, adeoq; & a Coni-ſectionis Diametro, (quæ nempe per eadem biſectionum puncta tranſit;) Earúmq; ſemiſſes, ut D O, diametro Coni-ſectionis *Ordinatim-applicatæ* dicuntur; ſuntq; inter bina diametri circularis (cui perpendiculariter inſiſtunt) ſegmenta, B D, D S, mediæ proportionales: Quæ quidem ſi diametro Coni-ſectionis A D, ad angulos rectos inſiſtant, Diameter illa *Axis* dici ſolet (qui ſuis ordinatim-applicatis eſt perpendicularis;) ſin minus, ſaltem Diameter, vel *Diameter Obliqua* vel *inclinata* dici ſolet.

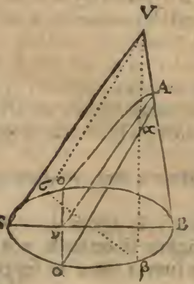
Ut autem Conus ipſe, ſic & Coni-ſectiones (Parabolam intellige & Hyperbolam, nam de Ellipſi ſecus eſt,) ſimul cum Cono in infinitum continuandæ ſupponuntur.

Quod autem *Planum Coni-ſectionem efficiens, ſi unam ex parallelis Coni circulis ſecet ſecundum rectam O O, ipſius diametro B S perpendicularem, etiam reliquos illi parallelos quos ſecat circulos ſecabit ſecundum rectas quæ ipſorum-diametris ipſi B S parallelis ſint perpendiculares* : Sic demonſtrabitur. Cùm circuli ſupponantur paralleli, erunt & eorum ſectiones O O, O O, (eodem plano factæ) parallelæ, (per 16 e 11.) quæ propterea cum parallelis circulorum diametris (B S, B S,) eoſdem angulos faciunt, (per 10 e 11.) ponitur autem, angulos ad diametrorum parallelarum unam rectos eſſe; ergo & ad omnes ; Quod erat demonſtrandum.

Reliqua in Propoſitione vel Definitiones ſunt, vel ex propoſitionis curriculo ſatis patent.

Monendum autem eſt *Parabolæ*, *Ellipſis*, & *Hyperbolæ* appellationibus, apud Geometras, (quâ igitur libertate & nos aliquando uſuri ſumus,) nonnunquam curvas *lineas* in ſuperficie conicâ factas, (quas in propoſitione definivimus,) nonnunquam verò *figuras planas* ejuſmodi curvis terminatas, intelligi. Siquando autem de ambiguitate ſignificationis metuatur, non incommodum erit *lineæ* vel *plani* vocem adjungere; ut *linea Parabolica*, *planum Parabolicum*, &c.

Monendum eſt etiam, ſub *Ellipſeos* nomine (quod tamen alii non ſolent) me etiam *Peripheriam Circuli* comprehendere, (vel etiam ipſum Circulum.) Circulus enim ab Ellipſi (figuram intellige lineâ Ellipticâ comprehenſam) non aliter differt quam ut Quadratum a Parallelogrammo. Nam ut *Parallelogrammum* cujus latera ſunt æqualia anguliq; recti, vel (ſi libet) cujus diametri conjugatæ ſunt æquales & ad angulos rectos, (habent enim & figuræ rectilineæ ſuas diametros, quanquam non ut curvilineæ infinitas, ſuíſq; diametris ordinatim-applicatas; & quidem Parallelogrammum diametrorum habet duo paria, nempe duas diagonales, & duas lateribus parallelas ſe mutuo biſecantes; tam illæ autem quam hæ ſunt conjugatæ;) eſt *Quadratum*: Sic *Ellipſis*, cujus diametri conjugatæ ſunt æquales & ad angulos rectos, *Circulus* eſt. Et quidem ea omnia quæ Ellipſibus univerſaliter conveniunt, conveniunt etiam circulis, (non minùs quàm quæ Parallelogrammis conveniunt, conveniunt Quadratis,) niſi quod Ellipſeos appellatio non ſoleat illis attribui. Sicui noſtra hæc phraſiologia non placeat, fruatur ſuo ſenſu; modò ſciat, quid apud me Ellipſeos nomine ſignificetur; quod neceſſariò monendum erat, ne dicta noſtra perperam intelligantur.



Monendum inſuper eſt, Quod ea omnia quæ jam expoſuimus de uno Triangulo-per-axem, unde Conum formari ſupponimus, pariter intelligenda ſunt de infinitis aliis Triangulis Conum per axem dividentibus. Poteſt enim ſuper eorum quodvis ejuſmodi formatio Coni ſupponi. Manentibus enim eiſdem centris, diſtantiis, & planis, iidem formantur circuli, quamvis aliæ atq; aliæ ſumantur Diametri, hoc eſt, quamvis alio atq; alio triangulo Conus per axem dividatur. Verbi gratiâ, Triangulo Vβσ (per axem etiam tranſeunti) eadem conveniunt quæ ipſi VBS convenire diximus.

Non tamen hæc ita intelligenda ſunt, acſi quocunq; Triangulo-per-axem accepto, eadem numerica Coni-ſectio, methoda jam dictâ, formaretur: Sed ſaltem quocunq; Triangulo-per-axem accepto, puta Vβσ, fieri poteſt ut illi accommodentur coni-ſectiones eodem modo quo ipſi V B S. Quamvis enim verum ſit, quòd Coni-ſectionis O A O, aliquod punctum, ut α, ſit in crure Vβ; attamen planorum O A O, O B O, communis ſectio O O, non erit trianguli Vβσ baſi βσ perpendicularis (quod in Coni-ſectionis geneſi, in propoſitione traditâ ſupponitur;) ſupponitur enim perpendicularis eſſe alii ejuſdem circuli Diametro B S, rectam βσ ſecanti; non igitur & ipſi βσ perpendicularis eſſe poteſt.

At interrogabit fortaſſe quiſpiam, Quid cauſæ ſit, cur illud poſtuletur ut recta O O (circulo & Coni-ſectioni communis) ſit circuli diametro B S (in triangulo VBS exiſtenti) perpendicularis? Annon enim, ſi planum ſecans ad triangulum-per-axem aliter inclinaretur, ſecaret ſuperficiem Coni? Omnino. An verò ea ſectio non una eſſet ex eis quas definivimus? Eſſet omnino. Cur igitur illa ſola inclinatio plani-ſecantis ad triangulum-per-axem admittitur, quæ rectam O O rectæ B S, perpendicularem efficiat? Reſpondeo; Quod alia quævis inclinatio non minùs quidem ſufficeret ad Coni-ſectionem aliquam efficiendam; ſed minùs apta eſſet ad Demonſtrationes inſtituendas; cùm hæ plerumq; ſupponant rectam O O, eíq; parallelas, a circulorum diametris biſecari, quòd non fieret niſi diametris illis eſſent perpendiculares. Ideóq; cùm Planum Coni-ſectionem efficiens ad varia triangula-per-axem variam inclinationem habeat, illud ex omnibus triangulum ſeligunt Conicorum ſcriptores ad cujus baſin rectæ illæ O O ſunt perpendiculares. Unum enim aliquod triangulum per-axem (& quidem unicum) illud patitur (niſi forſan coni-ſectio propoſita unus ſit ex circulis baſi parallelis) quomodocunq; Conus a plano ſecetur.

Quodnam autem ex omnibus illud ſit, ſic inveſtigatur; ſi, verbi gratiâ, Conus V B O, plano ſecetur faciente Coni ſectionem

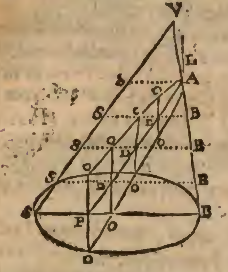
O A O, unum aliquem ex parallelis circulis O B O ſecante in O O: Ducatur in O B O circulo, diameter ipſi O O perpendicularis, quæ ſit B S, & compleatur Triangulum V B S. Patet enim Planum Coni-ſectionem efficiens, triangulo V B S ita inſiſtere, (puta in A D, quæ propterea Coni-ſectionis diameter erit,) ut circulum O B O ſecet ſecundum rectam O Q ipſius Diametro B S (quæ & Trianguli V B S baſis eſt) perpendicularem, quod erat faciendum. Triangulum igitur V B S illud eſt, ſecundum quod Coniſectionis O A O natura & proprietates ſunt perpendendæ. (ſi autem non ipſa B S, ſed alia aliqua, puta $\beta\sigma$, fuiſſet ipſi O O perpendicularis; tum non Triangulum V B S, ſed V $\beta\sigma$, ſeligendum eſſet.)

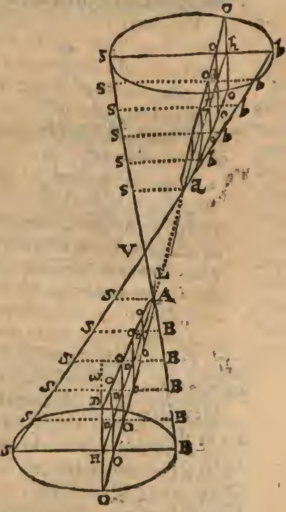
Et quamvis aliunde quidem verum ſit (ut ſuo loco dicetur) coniſectioni O A O alias Diametros (alióſq; propterea vertices) convenire; ſola tamen A D ea eſt quæ dici ſolet *Diameter ex generatione*; intellige, prout jam huic Cono applicatur: Nam revera eadem Coni-ſectio poteſt vel alii forſan Cono, vel etiam huic in alio ſitu, ita accommodari, ut alias habeat Diametros ex-generatione.

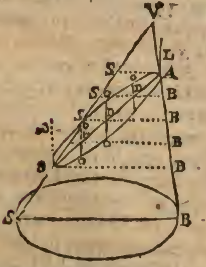
Atq; hæc quidem ad pleniorem propoſitionis intelligentiam monenda duxi.

Sed & ulterius monendum eſt; quod, *quum diximus Punctum A in utrovis Trianguli crure, puta V B, ubivis aſſignari poſſe; Vel excipiendum erit punctum Verticis V; vel, pro Coni-ſectione exſpectata, prodibit aliquid ſimplicius*; eò nempe quod una ſaltem quantitatum ex quibus Coni-ſectio dependet, evaneſcet in nihilum ſeu non-quantum. Nam, verbi gratia, ſi punctum A aſſignetur in cruris V B puncto V, & velim Parabolam deſcribere; recta A P (quæ ducenda erat parallela) cum ipſa V S coincidet; adeoq; rectæ S D evaneſcent, & propterea evaneſcent ordinatim-applicatæ D O, (nam ſi altera multiplicantium ſit 0 ciphra, erit & quantitas producta 0 ciphra:) adeóq; Parabola prodiret nullius latitudinis, hoc eſt, linea recta, terminata quidem ex parte A vel V, infinita verò ex parte P, vel O: (coincident enim puncta P, O, propter nullitatem ordinatim-applicatarum P O, vel D O.) Eodem modo, ſi deſcribenda ſit Ellipſis; Poſito puncto A in V, (ubicunq; in crure V S ſupponatur a,) propter coincidentiam punctorum A, V, coincident etiam rectæ A a, V a: ideóq;, evaneſcentibus rectis D S, evaneſcent etiam D O;

D O; eritq; propterea Ellipſis nullius latitudinis, hoc eſt, linea recta, utrinq; quidem terminata; (ſaltem niſi & punctum a in cruris V S puncto V aſſignetur; quo caſu, propter coincidentiam punctorum A, a, recta illa degenerabit in unicum punctum.) Pari modo, ſi deſcribenda eſſet Hyperbola; poſito, ut prius, puncto A in V, (ubicunq; aſſignetur H,) recta H A a crus utrumq; V B, V S, eodem puncto V, ſecabit; adeóq; tranſverſa diameter A a (propter coincidentiam punctorum A, a, V, evaneſcet; adeóq; Hyperbola in Triangulum degenerabit, (ut ex Hyperbolæ doctrinâ poſtea tradenda colligi poterit; interim idem ſatis patet ex dictis Prop. 6.) Saltem niſi recta







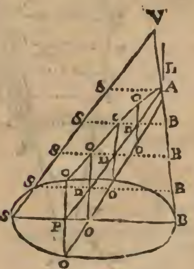
A H eouſq; recedat a crure V S, ut ipſi V B coincidat; quo caſu, (ſive A aſſignetur in vertice V, ſive ubivis aliàs in crure V B,) VB,) evaneſcent rectæ DB, adeóq; & DO; & pro Triangulo vel etiam Hyperbola OVO vel OAO, prodibit linea recta, ex unâ quidem parte terminata, ex reliqua vero infinita.

PROP. VIII.

De Parabolâ, Sectione Coni factâ.

IN Parabola, Quadrata Ordinatim-applicatarum ſunt interceptis Diametris proportionalia.

Quadrata nempe ordinatim-applicatarum PO, DO, &c. ſunt rectis PB, DB, &c. (in triangulo APB parallelis) proportionalia, (adeoq; & *interceptis Diametris*, hoc eſt, diametrorum ſegmentis inter ipſas ordinatim-applicatas & verticem interceptis, PA, DA, &c.) æqualia quippe rectangulis BPS, BDS, &c. quæ propter æquales PS, DS, &c. (in parallelogrammo APS) ſunt æque alta, & propterea baſibus (PB, DB, &c.) proportionalia.



Adeoq; ipſæ ordinatim-applicatæ ſunt in ſubduplicata ratione Diametrorum interceptarum; nempe in ſubduplicata ratione ſuorum quadratorum.

Si igitur ordinatim-applicatæ quotlibet æqualibus ab invicem diſtantiis ſumantur; erunt earum quadrata in continua progreſſione Arithmetica, (ut patet ex dictis ad Prop. 2.)

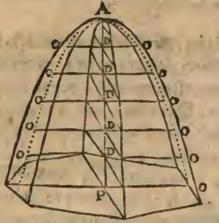
Conſtabit igitur (per Prop. 1.) ſemiparabolæ planum (adeoq; & totius Parabolæ) ex infinitis lateribus quadratorum Arithmetice proportionalium.

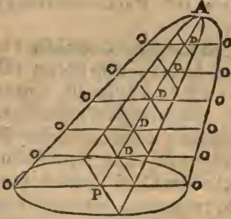
PROP.

PROP. IX.

De Conoide, & Pyramidoide Parabolico.

H*Inc ſequitur*; Si ex omnium in Parabola ordinatim applicatarū quadratis, ad communem axem ordinatim poſitis, formetur *Pyramidoides Parabolicum* (eo mdo quo Prop. 5, 6. formavimus Pyramidem & Conum) erit illud infinitorum planorum Arihmetice proportionalium aggregatum, (ſicut Triangulum rectarum,) ab o incipiendo & continue progrediendo ad baſin uſque.





Cælatoris a incuria error admiſſus eſt; nam pyramidoidis baſis ſupponitur ſexangula (novi ſeptangula) & recta OPO baſis eſſet Parabolæ punctuatæ.];

Adeoq; ſi Baſis figuræ ſic conſtructę in ſemiſſem Altitudinis ducatur, prodibit totius figurę ſoliditas: (eodem argumento quo uſi ſumus de triangulo Prop. 3)

Cumq; idem (eodem argumento) valeat de circulis, aliiſve figuris planis ſimilibus quibuſcunque, (ſunt enim ad invicem, ut diametrorum, vel rectarum quarumlibet ſimiliter ductarum, quadrata;) erit univerſaliter *Conoides vel Pyramidoides Parabolicum*, quacunq; baſe, (ſive etiam erectum ſit, ſive ſcalenum, ſive etiam quocunq; modo luxatum, per ea quę dicta ſunt Pr. 4.) *æquali* *æquale baſi in ſemiſſem altitudinis ductæ*; hoc eſt, *Semiſſis Priſmatis* (ut parallelogrammi Triangulum,) *ſuper eadem baſi æque-alti.*

Eſt enim (ex dictis) *Pyramidoides Parabolicum* (ſub quo & Conoides comprehendo) Aggregatum planorum ſimilium numero infinitorum Arithmetice proportionalium (ab 0 continue progrediendo,) circa eundem axem rectilineum ordinatim-poſitorum; quorum quidem ſingulorum craſſities ſupponitur æqualis $\frac{1}{\infty}$ altitudinis totius figurę ſolidę.

Quæ ſupra Prop. 5, 6. De Pyramide & Cono, eorúmq; altitudinibus, axibus, planiſq; ordinatim-applicatis; item de Pyramidibus Coníſq; rectis, ſcalenis, luxatis, &c. dicta ſunt; eadem ferè Pyramidoidibus & Conoidibus accommodanda ſunt.

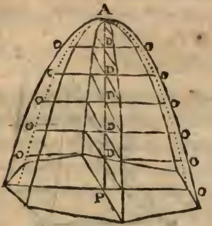
Ego verò hanc Conoidis, (adeóq; & Pyramidoidis) Parabolici formationem potius adhibeo, quàm quæ a veteribus aliíſq; adhiberi ſolita eſt, (nempe, circumductâ Semi-parabolâ rectâ, manente Axe;) quoniam ea formatio non omnibus Conoidibus (ſed ſolummodo rectis) nec Pyramidoidibus omnino convenit. Atq; hoc eâdem ratione facio, qua Apollonius Euclidéam Coni formationem, (circumducto nempe Triangulo rectangulo, manente laterum circa angulum rectum alterutro,) in aliam commutavit (circumductâ nempe per circul peripheriam lineâ rectâ, manente ipſius uno aliquo puncto extra circuli planum exiſtente:) quia ſcilicet Euclidéa iſta ſolis Conis rectis conveniebat, hæc autem quibusvis ſive rectis ſive ſcalenis. Non igitur mirari debet quiſpiam, ſi prout ille Euclidéam Coni, ſic ego Archimedéam Conoideos, formationem ſpecialem, in aliam magis univerſalem, commutavero: quæ etiam & Pyramidoidibus aliis (de quibus nulla hactenus, quantum ſcio, conſideratio habita fuit) pariter conveniat.

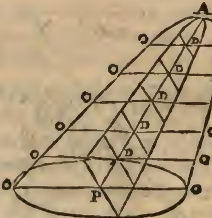
Quæ autem, de Conoidibus & Pyramidoidibus Parabolicis formandis, jam diximus; eadem de Ellipticis & Hyperbolicis deinceps intelligenda erunt.

PROP. X.

De Conoideos & Pyramidoideos Parabolici ſectione.

SI Pyramidoides (vel Conoides) Parabolicum plano per axem ſecetur; cum manifeſtum ſit ipſius infinita plana ſimilia ſimiliter ſecari, & quidem per centra; erunt ea ſimiliter biſecta; atque communes eorum cum plano ſecante ſectiones erunt propterea in figurarum ſuarum, (quæ quidem Arithmetice proportionales ſunt) adeoq; & diſtantiarum a vertice, ſubduplicata ratione, &, propterea, ut ordinatim-applicatæ in Parabolâ. *Communis igitur ſectio (Pyramidoidis Parabolici, planique per axem ſecantis,) eſt Parabola.*





De aliis verò Conoideos Parabolici ſectionibus (non per axem) non libet hic ſpeciatim diſſerere: *Sunt autem illæ omnes* (vel circuli, vel) *Ellipſes.*

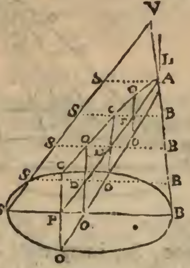
Nota tamen, ut ejuſdem Parabolæ infinitæ ſunt Diametri, (ut ſuo loco dicetur;) ita & *Conoideos Parabolici infinitos eſſe* (ſive *Diametros* dicas, ſive) *Axes*; *qui quidem omnes* (ut Parabolarum Diametri) *ſunt invicem paralleli*: *Qui omnes ſua plana habent Ordinatim-applicata.*

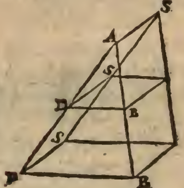
Verùm hæc monuiſſe ſufficiat, cùm non ſit hujus loci ea fuſius proſequi.

PROP. XI.

De Cuneo Parabolico.

SEd & libet hoc ſubjungere de Pyramidoide Parabolico. Quoniam (in Cono) Rectangula BDS æqualia ſunt Quadratis DO; ſi omnes rectæ BD ducantur in omnes DS, (hoc eſt, ſi ſuper Triangulo APB, erigatur Priſma cujus altitudo ſit AS, vel DS,) fient infinita Parallelogramma BDS æqualia totidem Quadratis DO: Hoc eſt, Pyramidoides Parabolicum (cujus baſis ſit Quadratum PO) æquatur Cuneo ſeu Priſmati APBS, (quem *Cuneum Parabolicum* libet appellare.) Omnia enim BDS rectangula in Cuneo (ipſi BPS parallela) ſunt ipſa rectangula BDS in Cono deſignata. Ideóq; & totum toti æquatur, & quidem ſegmenta illius analogis ſegmentis hujus.





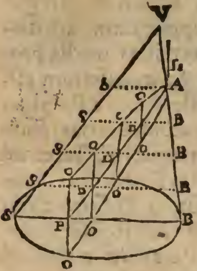
Intelligendum autem eſt, Altitudinem Cunei (perpendiculari ab acie A S ad oppoſitam baſin B P S demiſſa æſtimandam) eandem eſſe debere atq; Altitudinem Conoideos.

PROP. XII.

De Parabolæ Latere-Recto.

MAnifeſtum eſt, (per ea quæ dicta ſunt,) datis rectis D B, DS, hoc eſt, DB, A S; dari etiam DO (ordinatim-applicatam ad diametri punctum D) ut quæ eſt inter illas media proportionalis: At non contra; Nam & manifeſtum eſt, menſuras illas prorſus extraneas eſſe (extra Parabolæ planum conſtitutas) & omnino accidentarias, (non minùs quàm, in Multiplicatione, numeri Factores ad numerum Factum, qui ab aliis etiam Factoribus, infinitis modis variatis, produci poſſit:) Poſſunt enim binæ rectæ D B, B S, infinitis modis variari, iiſdem interim manentibus tam Diametro Parabolæ quàm ad illam ordinatim-applicatis; (ſi nempe quâ ratione augetur vel diminuitur P S vel A S, latus Parallelógrammi A P S, eâdem è contra minuatur vel augeatur P B latus trianguli A P B.) Quod quidem eouſq; verum eſt, ut quælibet parabola cuilibet Cono accommodari poſſit: (quod mox, ex abundanti, demonſtrabimus.)

Ne igitur nulla ſit determinata menſura, lineis ad ipſam Parabolam peculiariter pertinentibus exprimenda, quâ ordinatim applicatarum magnitudo explicetur: Loco rectarum D B, D S, hoc eſt D B, A S, (quarum hæc invariata manet, illa perpetuò variatur, prout propiùs aut remotiùs abeſt a Parabolæ vertice) duas alias jam olim ſubſtituerunt Coni-ſectionum contemplatores; Quarum altera eſt *Diameter* *intercepta*, A D, quæ intra Parabolam reperitur, eſtq; ſemper rectæ D B (cujus vices ſupplet) proportionalis, (utraq; nempe eâdem ratione ſimul & creſcunt & decreſcunt pro vario ſitu *puncti-applicationis* D.) Reliqua verò, quod *Latus rectum* vocatur, (vel recta diameter, vel recta juxta quam poſſunt ordinatim-applicatæ, vel etiam, apud Midorgium, Parameter,) non uſpiam vel in Coni-ſectione, vel in ipſo Cono, realiter exſiſtit; ſed ſolâ imaginatione ſupplitur, ut vices ſubeat rectæ D S, vel A S: Ideòq; quantuplo major eſt vel minor A D quam D B, tantuplo è contra minus vel majus ſupponitur Latus rectum, (puta L A,) quam D S vel A S: Adeóq; tribus D B, D S, D A, vel D B, A S, DA, erit quarta reciprocè-proportionalis L A; ut æqualia ſint rectangula D A × A L, ipſis D B × D S, vel D B × A S, hoc eſt, quadratis D O. Vel, (ſubſtitutis idoneis ſymbolis, puta b=D B, s=A S, d=A D, l=L A, & p=DO,) erit ubiq; Quadratum ordinatim-applicatæ in Parabolâ $p^2 = (bs =) dl$.



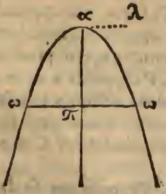
Eſtq; hoc quidem eſſentiale Parabolæ ſymptoma, unde reliqua omnia dependent, & calculo deduci poſſunt. Ut autem ſectione Coni fiat, omnino accidentarium eſt. Ideóq;, genuino ſymptomate ſic reperto, Conum dimittere licet; ideóq; ulteriorem in ipſius affectiones diſquiſitionem differemus donec ad abſolutam Parabolæ tractationem (ſine reſpectu ad Conum habito) perveniamus, (quam Prop. 21. & ſequentibus aggrediemur:) Interim ſimilia Ellipſeos & Hyperbolæ genuina ſymptomata tom ita inquiremus, ut omnium tandem abſolutam naturam ſeorſim perpendamus.

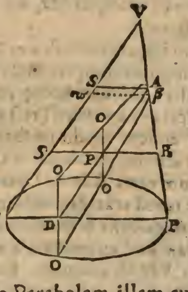
Monendum tamen eſt de Latere Recto; non idem Latus Rectum omnibus ejuſdem Parabolæ Diametris convenire; (Quod etiam de Ellipſeos & Hyperbolæ Latere Recto poſtea intelligendum erit:) Sed (ut habet quælibet Parabola infinitas Diametros, ut poſt dicetur, ita) quælibet Diameter ſuas habet ordinatim-applicatas, ſuúmq; Latus Rectū: Quæ quidem linea imaginaria, certæ tamen longitudinis, (quamvis vel ubivis aliàs ſcribi poſſit, vel etiam non ſcribi, ſed ſolâ imaginatione ſuppleri) duci ſolet a Diametri Vertice ordinatim-applicatis parallela.

Quæ autem de Parabolæ Latere-recto dicta ſunt, ea fere Lateribus-rectis Ellipſeos & Hyperbolæ deinceps accommodanda erunt.

Quod autem ſupra polliciti ſumus, ex abundanti, demonſtrare; nempe, *Quamlibet Parabolam cuilibet Cono aptari poſſe*; ſic oſtenditur.

Sit propoſita Parabola (cujuſcunq; Coni) $\alpha\,\omega$, cujus axis $\alpha\,\pi$, ejuſq; puncto cuilibet π ordinatim-applicata $\pi\,\omega$. (Quòd autem quælibet Parabola Axem habeat, & quomodo in datâ Parabola reperiatur, poſt oſtendetur; interim illud licebit, ſine violata methodo, quaſi conceſſum aſſumere, cùm tota hæc Demonſtratio ſit ex abundanti:) Dico Parabolam illam cuilibet Cono, puta V B S, aptari poſſe.





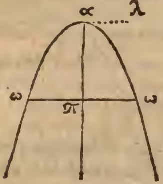
Secetur enim per axem Conus propoſitus plano ad baſin recto; ſitq; Triangulum illa ſectione factum V B D S. In hujus alterutro crure puta V S, ſumatur a vertice V ϖ æqualis ipſi α π diametro Parabolæ propoſitæ; & intelligatur recta duci ϖ β parallela baſi B S. Tum rectis ϖβ, πω, quæratur tertia proportionalis, cui æqualis ſumatur (in baſe Trianguli) recta S D; &, per punctum D, ducatur recta D A, lateri V S parallela, reliquoq; cruri V B occurrens in A. Dico rectam A D diametrum eſſe Parabolæ in Cono cui Parabola propoſita congruet, quod ſic oſtendo.

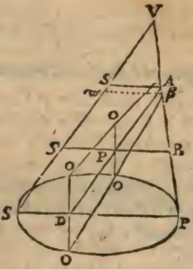
Super Triangulo VBDS, rectâq; in illo A D, (quæ eſt, ex conſtructione, cruri V S parallela,) ad angulos rectos erigatur Planum, DAO. Cùm autem tam planum ſic erectum, quam Baſis Coni BOSD (ex conſtructione,) ſint triangulo VBS recta; erit eorum communis ſectio DO, eidem Triangulo recta ſive perpendicularis (per 19 e 11,) adeoq; tam rectæ A D quàm (diametro baſis Coni) B S perpendicularis (per 3 d 11;) ideóq; (per 7 hujus) AO, ſectio in ſuperficie Coni Plano ſic erecto facta, erit Parabola, ejuſq; Axis A D.

Tum in Axi A D ſumatur recta A P, rectæ V ϖ, (hoc eſt απ,) æqualis: ductaq; SPB, rectæ SDB parallela; erit (propter ſimilia triangula) PB æqualis rectæ ϖ β: ſed & SP (propter parallelas) æqualis rectæ S D: Ideoq; ordinatim-applicata P O (media proportionalis inter S P, P B, hoc eſt, inter S D, ϖβ) æqualis eſt rectæ πω (quæ ipſis SD, ϖβ, media proportionalis eſt, ex conſtructione.)

Cùm igitur tam AP, απ, quam PO, πω, ſint æquales rectæ; atq; angulus comprehenſus APO, angulo comprehenſo απω, æqualis (quoniam uterq; rectus;) puncta α, π, ω, punctis A, P, O, applicata congruent; (rectæq; A P, P O, rectis α π, π ω. Atq; idem eodem modo probari poteſt de reliquis punctis. Tota igitur α ω toti parabolæ A O congruit. quod fieri poſſe probandum erat. Adeoq; Datam Parabolam dato Cono aptavimus: quod erat faciendum.

Idem Analytice ſic poterit inveſtigari. Propoſitum ſit datam Parabolam αω (cujus Axis α π, ordinatim-applicata πω,) dato Cono VBOS adaptare. Et ſupponamus præſtitum eſſe quod imperatur, ſitq; ea parabola Cono aptata A O, cujus Axis AP=αϖ, eiq; ordinatim-applicata PO=ϖω. Adeóq; recta PO perpendicularis tam rectæ BPS baſi Trianguli-per-Axem, aut ei parallelæ, (propter Coni-ſectionem,) quàm rectæ AP (propter Axem;) ideóq; recta PO plano APB (quod trianguli planum eſt) recta, (per 4 e 11.) & propterea tam planum circuli BOP, quam Parabolæ AOP, (quorum communis ſectio eſt PO) eidem Trianguli plano rectum erit, (per 18 e 11.) Atq; hinc quidem conſtat, Triangulum-per-axem-Coni in quo quærendus eſt Axis Parabolæ, illud eſſe, quod Coni baſi





rectum eſt; Atq; inſuper, Planum-ſecans quod Parabolam efficit (adeoq; & Parabolæ planum) iſti Triangulo rectum fore. Quæ eſt prima pars inquiſitionis.

Deinde (reperto jam quodnam ſit Triangulum per Axem Coni in quo quærendus eſt Axis quæſitæ Parabolæ; & quam inclinationem habiturum eſt planum ſecans ad illud Triangulum: ut ſitus Axis Parabolæ in illo Triangulo reperiatur, ſic progrediendum;) ſuppoſito, ut prius, rem factam eſſe quæ imperatur; & Parabolæ Axem AP in Triangulo-per-Axem VBS jacere: Erit AP (propter parabolam) alterutri Crurum, puta VS, parallela. Ideoq; (ſi per puncta A, P, duci intelligantur in triangulo per Axem rectæ AS, BPS, baſi parallelæ) proportionales erunt (propter ſimilia triangula), VB. BS :: VA. $AS = PS = \frac{BS \times VA}{VB}$. Item VS, SB :: AP. $PB = \frac{BS \times AP}{VS}$. Item (propter Coni-ſectionem) $SP, PO, PB \div$, hoc eſt

BS

$\frac{BS \times VA}{VB}.PO.\frac{BS \times AP}{VS} \div$ continuè proportionales. Ergo $POq = \frac{VA \times AP}{VB \times VS} \times BSq$. hoc eſt, $\pi\omega q = \frac{BSq}{VB \times VS} \times VA \times \alpha\pi$. & $\frac{VB \times VS \times \pi\omega q}{BSq \times \alpha\pi} = VA$. Ideoq; proportionales $BSq.\ VB \times VS :: \frac{\pi\omega q}{\alpha\pi}.\ VA$. Habetur ergo recta VA, adeoq; Parabolæ vertex A, in crure VB, unde ducta AP cruri VS parallela, eſt diameter Parabolæ quæſitæ.

Hoc eſt. *Si Conus Propoſitus ſecetur plano per Axem, quod Baſi Coni rectum ſit, triangulum faciente VBS: & fiat, ut BSq quadratum baſis trianguli, ad $VB \times VS$ rectangulum ſub-cruribus; ſic* $\frac{\pi\omega q}{\pi\alpha}$ (quadratum ordinatim-applicatæ in Parabolâ propoſitâ, per Axem diviſum, hoc eſt) *Latus rectum Parabolæ propoſitæ Axi conveniens; ad VA diſtantiam verticis Parabolæ a vertice Trianguli, in utrovis ipſius crure menſurandam; Et deniq; a vertice A recta ducatur AP oppoſito cruri parallela; eiq; Planum erigatur plano trianguli VBS rectum: Planum hoc in ſuperficie Coni faciet Parabolam, cui Parabola Propoſita congruet.*

Demonſtratio, per repetita Analyſeos veſtigia facilè inſtituetur.

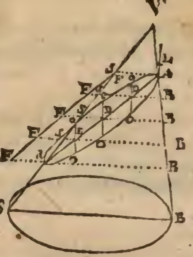
Pari fere methodo demonſtrari poterit, *Datam Ellipſin vel Hyperbolam* (de quibus poſtea dicendum erit) *non quidem Cono cuilibet, ſed ſaltem Conis quotlibet ſpecie differentibus, aptari poſſe.* Cujus Propoſitionis & Demonſtrationem & Determinationem lubens prætereo, partim ne tædio ſim, nec velim tyronibus ingenium ſuum exercendi cauſam præripere, partim etiam quoniam illud inſtituto noſtro non eſt neceſſarium.

PROP. XIII.

De Ellipſi, ſectione Coni factâ.

IN elipſi, Quadrata ordinatim-applicatarum æqualia ſunt differentiis binorum rectangulorum; quorum quidem illa (majora) ſunt interceptis

Diametris proportionalia; hæc vero (minora) in earundem ratione duplicata.

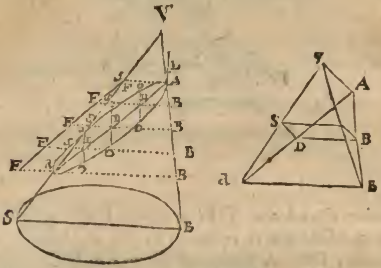


Sunt enim Quadrata DO æqualia Rectangulis $BD \times DS$, (per prop.7.) Ducta vero recta SFF, ipſi AE parallela, & continuatis rectis BDS ad F; erunt ubiq; rectæ $DS = DF - FS$. Et Rectangula $BD \times DS = BD \times DF - BD \times FS$. Sunt autem (propter æquales rectas DF) Rectangula $BD \times DF$, rectis BD proportionalia, ideóq; & rectis DA diametris interceptis (propter ſimilia triangula ADB.) Rectangula verò $BD \times FS$ (quoniam tam BD quàm FS rectæ ſunt rectis DA proportionales) ſunt in duplicatá ratione diametrorum interceptarum DA. Cum igitur ſit ubiq; $DOq = (BD \times DS =)\ BD \times DF - BD \times FS$; conſtat propoſitum.

PROP. XIV.

De Elliptico Pyramidoide, & Conoide, (ſeu Sphæroide) & Cuneo.

SI (ut Prop. 5, 6. formavimus Pyramidem vel Conum, & Prop. 9. Pyramidoides Parabolicum,) ex omnibus quadratis DO ordinatim-aplicatarum in ellipſi, formetur *Pyramidoides ellipticum* bicuſpe (hoc eſt, Pyramidoides geminum ſuper communi baſe, vertices habens oppoſitos,) æquabitur illud cuneo cuidam bicuneato (nempe binas oppoſitas acies habenti, ſed ſitu ſubcontrario & quaſi decuſſato) hoc eſt, corpori ſolido ſuper baſi triangulari aBA erecto, altitudinem



habenti ſuper puncto A æqualem rectæ AS, ſed æquabiliter decreſcentem donec ſuper recta aB tandem evaneſcat & nulla ſit. Et quidem ſegmenta illius, Analogis ſegmentis hujus. Adeoq; & notæ menſuræ.

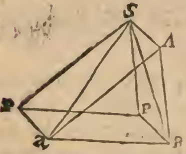
Manifeſtum enim eſt, quod, ſi Cuneus ille bicuneatus (quem *Cuneum Ellipticum* libet appellare) plano ad planum trianguli aBA recto (ſicut & AS ſupponitur ad idem planum recta eſſe ſeu perpendicularis) ubivis ſecetur ſecundum rectam DB quæ ſit aB rectæ parallela, ſectio illa præſtabit rectangulum BDS, cujus duo latera erunt rectæ aB parallela, reliquaq; duo rectæ AS, totumq; rectangulum BDS in Cuneo, Analogo rectangulo BDS in Cono deſignato, æquale erit: Adeoq; rectangula omnia BDS in cuneo, æqualia erunt rectangulis omnibus BDS in Cono deſignatis, hoc eſt, omnibus quadratis DO; hoc eſt, totus Cuneus toti *Pyramidoidi* bicuſpidi æqualis erit, & quidem ſegmenta hujus analogis ſegmentis illius. Quod erat oſtendendum, Ita tamen ut eadem retineatur altitudo Pyramidoidis, & Cunei, ut quadrata unius & Rectangula alterius æquè craſſa intelligantur.

Cuneus autem ille bicuneatus, (quem Ellipticum diximus) eſt Pyramis ſuper baſi aBA, altitudinem habens AS, adeóq; notæ menſuræ.

Quod autem de Pyramidoide Elliptico ex omnibus Quadratis DO, dictum eſt; perinde valeret, ſi pro quadratis DO, ſubſtituerentur quadrata OO (ordinatim inſcriptarum;) niſi quod Pyramidoides hoc eſſet illius quadruplum.

Cognitâ verò menſurâ Pyramidoidis Elliptici ſuper baſi quadrata, adeóq; & ratione quam habet ad Parallelepipedum ſuper eadem baſi æquè-altum: cognoſcetur etiam ratio Conoideos Elliptici (vel, ut dici ſolet, Sphæroideos) ad Cylindrum ſuper eadem baſi æquè-altum; vel etiam Pyramidoideos ſuper quacunq; baſi plana (puta triangulari, quinquangulari, &c. vel etiam curvilinea, aut miſta,) ad Priſma ſuper eadem baſi æque-altum: (ſi nempe pro omnibus quadratis ſubſtituantur totidem circuli, triangula, aliæve ſimiles figuræ.) Per *Baſin* autem hic intelligo medium illud planum quod duobus illis ſive Pyramidoidibus ſive Conoidibus eſt baſis communis.

Eſt autem *Ellipticus* ille (quem dicimus) cuneus, cunei Parabolici ſegmentum. Si enim cuneus Parabolicus AP, ſecetur Plano aSB; erit aSBA cuneus Ellipticus ſive Pyramis ſuper triangulari baſi aBA: reliquum verò ſegmentum aBSPP eſt Pyramis ſuper baſi quadrilatera aBPP, utriuſq; verò pyramidis cuſpis communis S. Si igitur ex Priſmate (cuneo nempe Parabolico) AP, auferatur Pyramis aBSPP, reſtabit Cuneus Ellipticus (vel Pyramis) aSBA; cui æquale eſt Pyramidoides Ellipticum.



Sed & idem immediate colligi poteſt ex propoſitionis præcedentis calculo. Cùm enim omnia rectangula $BD \times DS$, hoc eſt, omnia quadrata DO, æquantur omnibus rectangulis $BD \times DF$, demptis omnibus $BD \times FS$, patet propoſitum. Omnia enim rectangula $BD \times DF$ conſtituunt cuneum Parabolicum, (per prop. 11.) Omnia vero BD×FS, Pyramidem; (per prop. 6.) Eorum igitur differentia æquatur vel Cuneo Elliptico, vel etiam Elliptico Pyramidoidi.

PROP. XV.

De Conoideos & Pyramidoideos Elliptici Sectione.

SI Pyramidoides vel Conoides Ellipticum plano per Axem (vel, ſi mavis, Diametrum) ſecetur; ſectio erit (vel circulus, vel ſaltem) Ellipſis.

Probatio ejuſmodi inſtituenda eſt, qualis prop. 6, & 10. ubi Sectio Pyramidis per axem oſtenditur eſſe Triangulum; & Pyramidoidis Parabolici, Parabolam,

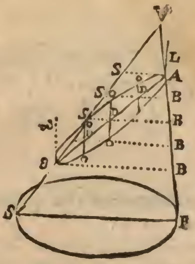
Alias vero ſectiones non per Axem, non libet hic ſpeciatim attingere. Moneo tamen *Conoideos Elliptici* (hoc eſt, Sphæroidos) *Axes* (niſi Diametros malis appellare) *infinitos eſſe in communi centro* (ut Ellipſium Diametri) *coeuntes*; *qui omnes ſua plana habent ordinatim-applicata*. Nota etiam *Conoideos Elliptici* (vel Sphæroideos) *Sectiones omnes plano factas* (ſive per axem, adeóq. & centrum, tranſeunte, ſive non,) *eſſe* (vel circulos, vel ſaltem) *Ellipſes*.

His autem diutius inſiſtere non eſt hujus loci. Sufficit monuiſſe.

PROP. XVI.

De Ellipſis Latere-Recto.

CUM manifeſtum ſit ex dictis, Quadrata DO, (Rectangulis BD×DS æqualia,) ex cognitis rectis BD, DS, cognoſci poſſe; non autem, e contra, ex cognitis DO, cognoſci rectas BD, DS; (poſſunt enim rectangula BD×DS infinitis modis variari, dummodo eadē maneat ordinatim-applicatarum quantitas, adeoq; eadem Ellipſis in conis diſſimillimis reperiri: ut patere poterit ex eis quæ ſupra de parabola dicta ſunt ad Prop. 12.) Placuit igitur Conicorum ſcriptori-



bus (ut in Parabola, ſic) in Ellipſi aliis menſuris ordinatim-applicatarum quantitatem determinare, quæ eandem Ellipſin ubiq; comitentur.

Nempe pro ſingulis rectis BD, ſubſtituunt ſingulas AD, diametros interceptas; quę quidem illis ſunt proportionales.

Pro recta vero AS, ſubſtituunt aliam, puta LA, imaginariam, (quod *Latus Rectum* appellant) quę tribus AS, BD, DA, ſit quarta reciproce proportionalis; ut ſit ubique $BD \times AS = DA \times LA$. Adeóq; Latus-rectū $LA = \frac{DB}{DA} \times AS$, & $AS = \frac{DA}{DB} \times LA$.

Tum (continuata Diametro AD donec oppoſito Trianguli-per-axem cruri occurrat in a, ut habeatur Diameter-tranſverſa Aa;) erit (propter ſimilia triangula) $Aa.AS :: Da.DS = \frac{Da}{Aa} \times AS$. Ideoque $BD \times DS$ $(= DOq) = \frac{Da}{Aa} \times AS \times BD = \frac{Da}{Aa} \times LA \times DA$. (quia nempe $BD \times AS = DA \times LA$, ut dictum eſt.)

Hoc eſt (ſubſtitutis idoneis ſymbolis, nempe $t =$ Aa, $d =$ DA, $t - d =$ Da, $l =$ LA, & $e =$ DO) Quadratum ordinatim-applicatæ in Ellipſi $e^2 = \frac{t-d}{t} ld = \frac{td-d^2}{t} l = dl - \frac{d}{t} dl = ld - \frac{l}{t} d^2$. (omnes enim hæ notationes tantundem valent.) Et quidem (repetita figura prop. 13.) tam ſeparatim $ld =$ FD$\times$BD, & $\frac{l}{t} d^2 =$ FS$\times$DB, quã conjunctim $-ld\frac{l}{t}d^2 =$ FD$\times$DB $-$ FS$\times$DB $=$ SD$\times$DB $=$ DOq.

Demonſtratione non opus eſt aliâ quam quæ propoſitionis curriculo paſſim interſeritur.

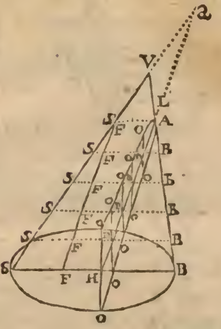
Eſtq; hoc quidem eſſentiale Ellipſeos Symptoma; unde reliqua dependent & calculo deduci poſſunt. Ut jam non opus ſit reliquarum affectionum in ipſo Cono inveſtigatio; ſed melius & clarius deinceps in abſolutâ Ellipſis conſideratione (ſine ullo ad Conum reſpectu habito) inſtituetur: quam prop 26. aggrediemur.

PROP. XVII.

De Hyperbola, Sectione Coni facta.

IN Hyperbola; Quadrata Ordinatim-applicatarum, æqualia ſunt aggregatis binorum rectangulorum; quorum quidem altera ſunt interceptis-Diametris proportionalia, altera vero in earundem ratione duplicatâ.

Sunt enim Quadrata DO, æqualia Rectangulis BD$\times$DS (per Prop. 7.) Ducta vero rectâ SFF ipſi AH parallela, (quæ Trapezium SSHA in Parallelogrammum SFHA & Triangulum SFS, dirimat) erunt ubiq; rectæ DS$=$DF$+$FS, & Rectangula BD$\times$DS$=$BD$\times$DF$+$BD$\times$FS. Sunt autem (propter æquales DF) Rectangula BD$\times$DF, rectis BD proportionalia, ideoq; & rectis DA Diametris-interceptis. Rectangula vero $BD \times FS$ (quoniam tam BD quàm FS rectæ ſunt rectis DA proportionales) in duplicata ratione



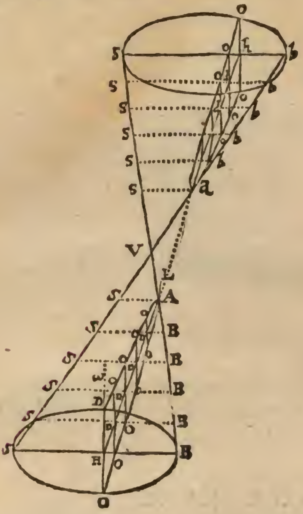
rectarum DA diametrorum interceptarum. Cùm igitur ſit ubiq; $DOq = (BD \times DS =)\ BD \times DF + BD \times FS$; conſtat propoſitum.

PROP. XVIII.

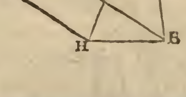
De Hyperbolico Pyramidoide, Conoide, & Cuneo.

SI (ut Prop. 9. & 14. formavimus Pyramidoides Parabolicum & Ellipticum) ex omnibus Quadratis DO ordinatim-applicatarum in Hyperbola, formetur *Pyramidoides Hyperbolicum*; æquabitur illud Cuneo cuidam, quem *Cuneum Hyperbolicum* libet appellare; nempe ſolido ſuper baſi triangulari AHB erecto, altitudinem habenti ſuper puncto A æqualem rectæ AS, ſed continue creſcentem æquabiliter donec ſuper rectâ HB æqualis evadat rectæ HS. Et quidem ſegmenta illius Pyramidoidis, ſegmentis

mentis cujus Cunei analogis erunt æqualia Adeoq; tam Pyramidoides totũ quam illius ſegmenta notæ erunt mẽſuræ.



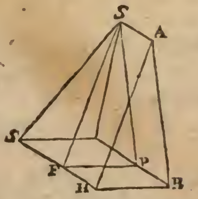
Si enim Cuneus ille Hyperbolicus plano ubivis ſecetur, quod plano Trianguli AHB rectum ſit, (ſicut & AS ſupponitur eidem triangulo rectam eſſe,) & plano HBS parallelum: Rectangula ſingula hujuſmodi ſectione facta, puta BDS, æqualia erunt ſingulis BDS in cono deſignatis, hoc eſt, ſingulis quadratis DO: adeóq; aggregatum eorum aggregato horum; hoc eſt, totum Pyramidoides toti Cuneo; atq; (eâdem ratione) ſegmenta illius analogis ſegmentis hujus. Modo interim curetur ut eadem retineatur Pyramidoidis & Cunei Altitudo; ut Quadrata unius & Rectangula



la alterius æqualem ſupponantur craſſitiem habere.

Cuneus autem ille Hyperbolicus, eſt fruſtum Priſmatis (plano abſciſſum) ſuper baſi AHB erecti; altitudinem habens ſuper puncto A æqualem rectæ A S, ſuper punctis autem H,B, æqualem rectæ H S. Adeóq; notæ menſuræ.

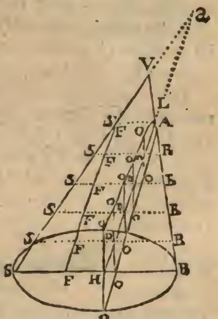
Eſt autem hic Cuneus, Aggregatum Cunei Parabolici HBASPF, & Pyramidis SPFS. quod patebit ſi ſecari intelligatur plano SFP parallelo triangulo AHB.



Quod ipſum etiam concludi poteſt ex calculo. Cum enim ſingula quadrata DO, vel rectangula BDS in Cono, æquentur ſingulis aggregatis $BD \times DF + BD \times FS$; manifeſtum eſt omnia $BD \times DF$ (per Prop. 11.) æquari Cuneo Parabolico, atq; omnia $BD \times FS$ (per Prop. 6.) Pyramidi.

Cuneus autem ille, ſive conſideretur ut fruſtum Priſmatis, ſive ut aggregatum Pyramidis & Priſmatis (Cuneive Parabolici,) erit notæ menſuræ; Adeóq; & Pyramidoides Hyperbolicum (huic æquale) erit notæ menſuræ.

Quod autem de Pyramidoide ex quadratis DO dictum eſt, pariter etiam conveniret Pyramidoidi ex quadratis O O (ordinatim-inſcriptarum) niſi quod hoc eſſet illius quadruplum.



Item (quoniam ſimiles figuræ planæ ſunt ad invicem ſicut homologorum laterum, vel etiam rectarum quarumlibet ſimiliter inſcriptarum, quadrata;) Cùm cognoſcatur menſura Pyramidoidis Hyperbolici ſuper baſi quadratâ, adeóq; & ratio ipſius ad Parallepipedum ſuper eâdem vel æquali baſi æquè-altum; cognoſcetur etiam ratio cujuſlibet alîus Pyramidoideos vel Conoideos Hyperbolici ſuper quacunq baſi plana ad Priſma vel Cylindrum ſuper eâdem vel æquali baſi æquè-altum. Si nempe pro ſingulis quadratis ſubſtituantur vel Circuli vel Triangula, vel quævis aliæ figuræ planæ ſimiles.

PROP. XIX.

De Conoideos & Pyramidoideos Hyperbolici Sectione.

SI Pyramidoides vel Conoides Hyperbolicum plano per Axem (vel, ſi mavis, Diametrum) ſecetur; Sectio erit Hyperbola.

Probatur eodem argumento quo uſi ſumus de Pyramide & Cono prop 6. atq; de Pyramidoidibus & Conoidibus Parabolico & Elliptico, prop. 10 & 15.

Habet autem Conoides Hyperbolicum Axes (niſi Diametros malis appellare) *infinitos, communi centro* (ſed extra Conoides) *coeuntes; Qui & ſua habent plana ordinatim applicata.*

Si vero ſecetur Conoides Hyperbolicum plano per Axem (vel Diametrum potius) *non tranſeunte; poteſt ea Sectio vel eſſe Hyperbola, vel Parabola, vel Ellipſis* (circulúſve.)

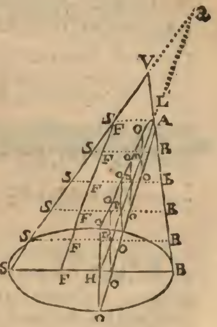
Et quidem de (Pyramidoidibus & præſertim) Conoidibus, Parabolicis Ellipticis & Hyperbolicis; corúmq; Axibus ſive Diametris, interceptis & tranſverſis; Planiſq; ordinatim applicatis, ſecantibus, & tangentibus; Centris, item & Lateribus-Rectis, aliiſq; ejuſmodi: facile eſſet novam quidem nec injucundam diſquiſitionem inſtituere; (ad quod etiam ſatis proclivis ſum, cùm totam fere iſtius negotii difficultatem jam ſuperaverim, nec quicquam ferè ſuperſit aliud quàm ut quæ mente concepi verbis exprimam:) Verùm illud non eſt hujus loci; neq; jam licet nimium divagari. Et forſan alii cuidam non ingratum erit, ex eâ methodo quam nos in Coni-ſectionum tractatione calcamus, anſam arripere tale quid in Conoidibus exercendi. Nobis interim & monuiſſe & innuiſſe hic loci ſufficiat: aliud enim eſt quod præ manibus habemus.

PROP.

PROP. XX.

De Hyperbolæ Latere-Recto.

Cum ſit in Hyperbola, ut dictum eſt, $DOq = BD \times DS$; adeoq; quantitas ordinatim-applicatarum DO, ex cognitis rectis BD, DS, cognoſci poſſit; non contra: (cùm poſſint rectæ BD, DS, infinitis modis variari, pro conorum variorum diverſitate, aut etiam varia ad eundem conum applicatione, dum interim rectarum DO quantitas eadem maneat; ſicut de Parabolâ & Ellipſi ſupra dictum eſt prop. 12, & 16.) Commodum igitur viſum eſt Conicorum Scriptoribus, harum loco, alias menſuras ſubſtituere, quibus Ordinatim-applicatarum quantitatem exprimant, quæ eandem Hyperbolam ubique comitentur in quocunq; demum cono, aut quocunq; ad illum modo applicetur, aut etiam extra conum conſtituatur. (Quod & de Parabolâ & Ellipſi factum eſſe ſupra declaratum eſt.)



Nempe, pro ſingulis rectis BD, ſubſtituunt ſingulas AD diametros-interceptas, quæ quidem illis ſunt proportionales.

Pro rectâ verò AS, ſubſtituunt aliam, puta LA, imaginariam, (quod *Latus-rectum* appellant;) quæ tribus DB, AS, DA, ſit quarta reciprocè proportionalis; ut ſit ubiq; $DB \times AS = DA \times AL$; adeóq; Latus rectum $LA = \frac{DB}{DA} \times AS$, & $AS = \frac{DA}{DB} \times LA$.

Deniq; (producta prius diametro DA, extra Hyperbolam, donec Oppoſito vel Triangulo vel Cono occurrat in a, ut habeatur Diameter-tranſverſa Aa,) erit (propter ſimilia triangula) $Aa.\ AS :: Da.\ DS = \frac{Da}{Aa} \times AS$; ideoq; $BD \times DS (= DOq) = \frac{Da}{Aa} \times AS \times BD = \frac{Da}{Aa} \times LA \times DA$, (quia nempe $BD \times AS = DA \times LA$ ut dictum eſt.)

Hoc eſt, (ſubſtitutis idoneis Symbolis, nempe $t = Aa$, $d = DA$, $t+d = Da$, $l = LA$, & $h = DO$,) Quadratum ordinatim-applicatæ in Hyperbolâ $h^2 = \frac{t+d}{t} ld = \frac{td+d^2}{t} l = dl + \frac{d}{t} dl = ld + \frac{l}{t} d^2$ (omnes enim hæ notationes tantundem valent.) Et quidem tam ſeparatim $ld = FD \times DB$, & $\frac{l}{t} d^2 = FS \times DB$, quam conjunctim $ld + \frac{l}{t} d^2 = FD \times DB + FS \times DB = SD \times DB = DOq$.

Eſtq, hoc quidem primarium atq; eſſentiale Hyperbolæ ſymptoma, unde reliqua dependent omnia & calculo comprobari poſſunt. Reliquas Hyperbolæ affectiones deinceps inveſtigabimus, ubi abſolutam ipſius tractationem (ſine reſpectu habito ad Conum) inſtituemus.

Atq; hactenus quidem *Coni-ſectiones* vulgo dictas, Parabolam, Ellipſin, atq; Hyperbolam, inſpecto Cono conſideravimus; ut quæ a Cono ſectó (quod & nomen innuit) originem traxiſſe reputantur. Adeóq; primaria illarum ſymptomata ab ipſo deduxi; quod & de aliis illarum affectionibus feciſſe (ſi id opus eſſet) non adeo eſſet difficile. Quoniam autem earum natura magis abſoluta eſt, quam ut ad Conum ſolum pertinere videantur; priorem contemplationem eouſq; proſecutus ſum, ut & fontes aperirem unde Veteres doctrinam ſuam hauſiſſe videntur, & quibus paſſibus ad abſtruſas illas quas exhibent demonſtrationes aut pervenerint aut ſaltem perveniſſe potuerint; Et eſſentialia illarum ſymptomata inde deducerem, ut tandem liceat illas etiam extra Conum ſuum intelligere, aut etiam (ſi libet) de Cono in Conum transferre; cum earum affectiones reliquæ ex jam traditis (etiam ſine Coni auxilio) deduci poſſint, ut in ſequentibus patebit. Non autem earum affectiones omnes ea methodo proſecutus ſum; quoniam illarum traditio ex abſoluta, quæ ſequitur, tractatione (ſepoſito Cono) & clarius & facilius peragi poſſit, nec opus ſit rem eandem iteratò agere.

* * *

PARS

PARS SECUNDA.

CUM tradita ſint in præcedentibus Parabolæ, Ellipſis, *atq;* Hyperbolæ, (*quas* Coniſectiones *appellant,*) *eſſentialia ſymptomata, ab ipſo ſecto Cono* (*unde Originem traxiſſe exiſtimantur*) *deſumpta; quæ ipſarum naturam abſolutam ita interim exponunt, ut ſive a Secto Cono, ſive aliunde geneſin ſortiantur eadem natura abſoluta eiſdem characteribus deſignanda eſſet: Licebit in ſequentibus illas* (*ſive lineas ſive figuras*) *ſecundum abſolutam quam in ſe habent naturam contemplari, ſine reſpectu ad geneſin habito, quæ vel a Sectione Coni, vel etiam aliunde contingere poſſit: Et quidem undecunq; contingat, abſolutam earum contemplationem neutiquam conturbet.*

PROP. XXI.

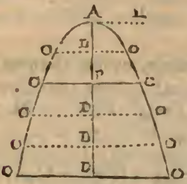
De Parabola, abſolutè conſideratâ.

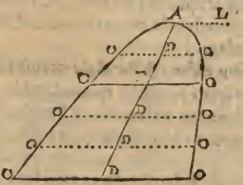
CUm ſit in Parabola Quadratum Ordinatim-applicatæ cujuſlibet ($p^2 = ld$) æquale rectangulo quod intercepta Diametro & Latere-recto comprehenditur, (ut, inſpecto Cono ſupra deprehendimus, prop. 12.) Licebit jam Parabolam, eo charactere ornatam, ſuo Cono eximere, atq; abſolutè quidem & Univerſaliter definire.

Frabolam igitur appello eam (ſive lineam curvam in plano deſcriptam, ſive figuram planam, ejuſmodi curvâ terminatam, puta OAO) cujus ordinatim-applicatarum quadrata ſunt interceptis-diametris proportionalia.

Rectam vero (imaginariam) quæ cum interceptis-diametris (tanquam communis altitudo) continebit rectangula (ipſis quidem diametris-interceptis proportionalia) Quadratis illis Ordinatim-applicatarum æqualia, appello *Latus-Rectum*; puta LA.

Ordinatim-applicatas verò appello, (DO, PO,) ſemiſſes parallelarum rectarum, (OO, OO,) Parabolâ utrinq; terminatarum (quas *Ordinatim-inſcriptas*, vel *Ordinatim-ſubtenſas* appello) una linea recta (puta ADP, quam appello *Diametrum*) biſectarum.





Punctum autem illud biſectionis, (D vel P,) *Punctum applicationis* appello; in quo quippe Diametro ſuæ applicatur ea quam Ordinatim-applicatam diximus.

Diametri vero ſegmentum, puncto-applicationis & curva Parabolica comprehenſum, (AD, AP,) *Diametrum-interceptam* appello.

Punctumq; Diametri in curva illa exiſtens (puta A) appello *Verticem*, (tam Diametri, quàm ipſius Parabolæ, ſecundum illam Diametrum conſideratæ.)

Ordinatim-poſitas appello non modo eas, quas ſupra *Ordinatim-inſcriptas*, atq; *Ordinatim-applicatas* dixi, (quæ vel utrinq; vel ab altera ſaltem parte Parabola terminantur,) ſed alias quaſvis ipſis parallelas (quantævis longitudinis) Diametro ſimiliter appoſitas, & propterea eoſdem cum diametro angulos facientes.

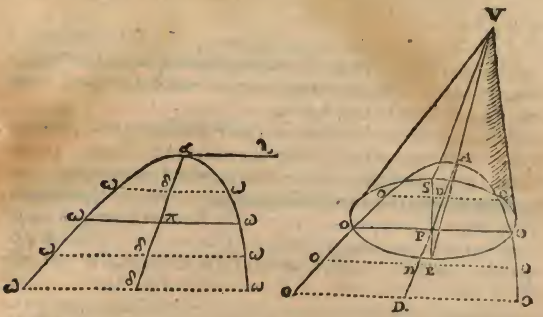
Atq; hinc quidem, ſi fuiſſet res integra, neq; Conicæ Sectiones, ut vocantur, Originem a Cono traxiſſe vulgo reputarentur, (quare & mihi neceſſe erat eas, ſecundum illam etiam hypotheſin exponere, ne videar novas quaſdam figuras comminiſci, potius quam ab aliis receptas explicare:) licuiſſet totius hujuſce tractationis initium poſuiſſe, omiſſis eis omnibus quæ ſuperius in parte prima exhibuimus; aut ea ſaltem (ſi libuiſſet adjungere) hinc quaſi a vero fonte demonſtraſſe. (Adeoq; novas terminorum aliquot definitiones neceſſe eſt & hîc & deinceps aliquoties adjungere, omiſſa Coni mentione, ne opus ſit ad præcedentia recurrere, aut Coni auxilium in definitionibus poſtulare.)

Non enim eſt *Parabolæ* magis eſſentiale, ut fiat *Sectione Coni Plano lateri parallelo*; quam *Circulo*, ut fiat *Sectione Coni plano baſi parallelo*; aut *Triangulo*, ut fiat *Sectione Coni per Verticem*. Neq; illud volunt alii: Quamvis enim Parabolam (quod & de aliis Coni-Sectionibus ſimiliter intelligendum eſt) ſecto Cono generari definiant; non tamen ſolas illas, quæ ſectione Coni fiunt, pro Parabolis habent, (nam & alios agnoſcunt Parabolam in plano deſcribendi modos;) ſed tales eſſe volunt (ſive figuras ſive lineas curvas) quales ejuſmodi ſectione Coni fieri poſſunt.

Parabolam autem a *nobis definitam eandem eſſe cum Parabola Apollonii*, & aliorum; talem nempe, qualis ſectione Coni effici poſſit: Sic demonſtro.

Eſto Parabola quælibet a nobis definita $\alpha\omega$, (ejúſq; Ordinatim-applicata quælibet $\pi\omega$, cum diametro $\alpha\pi$ angulum $\alpha\pi\omega$ quemcunq; faciens; ſitq; $\alpha\lambda$ latus rectum.) Dico hanc Parabolam talem eſſe qualis ſectione Coni effici poſſet.

Fiant enim rectæ $AP = PB = \alpha\pi$; ſitq; angulus APB rectus & (continuata BP) fiat $PS = \alpha\lambda$; & jungatur recta BA, quæ (continuata) concurrat cum rectâ SV (ipſi PA parallela) in V, ut compleatur triangulum VBS; ſuper quod erigatur circulus diametrum habens BS, qui cùm triangulo VBS angulum inclinationis faciat æqualem angulo $\alpha\pi\omega$; eiq; paralleli



circuli alii infiniti ſupponantur, (diametros habentes in triangulo VBS ipſi BS parallelas) qui conum VBOS compleant (per prop 5) per cujus axem incedit VBS Triangulum (quippe in quo reperiuntur omnium circulorum parallelorum diametri.) Tum erigatur planum APO triangulo VBS rectum, quod igitur ſecabit circulum SOB ſecundum rectam PO, quæ (propter angulum etiam APB rectum) perpendicularis erit rectæ BS, per 3 & 4 dd 11, (angulumq; APO conſtituet æqualem inclinationi planorum, per 6d11, adeóq; angulo $\alpha\pi\omega$,) Planum igitur APO, coniſectionem efficit AO: cúmq; ipſius diameter AP parallela ſit VS oppoſito cruri trianguli-per-axem; ſectio illa erit parabola, qualem deſcripſimus prop. 7. (ut inde patet;) hoc eſt, qualem definit Apollonius prop. 11. lib. 1. Conicorum.

Sed & eidem congruit Parabola propoſita, a nobis definita. Nam quadratum PO $(=BP \times PS)$ æquatur quadrato $\pi\omega$ $(=\pi\alpha \times \alpha\lambda)$, cùm ſit (ex conſtructione) $\pi\alpha = PB$, & $\alpha\lambda = PS$: adeoq; & recta $PO = \pi\omega$. Sed & (ex conſtructione) $AP = \alpha\pi$, & angulus $APO = o\pi\omega$, (ut oſtenſum eſt:) congruunt ergo rectæ AP, PO, rectis $\alpha\pi$, $\pi\omega$, (& angulus comprehenſus angulo comprehenſo:)

henſo:) Atq; eâdem ratione reliquæ ordinatim-applicatæ DO reliquis $\delta\omega$ congruunt, adeóq; & Parabola Parabolæ congruit. Parabola igitur a nobis definita, Parabolæ ſectione coni factæ congruit, adeóq; talis eſt qualis ſectione coni effici poſſet. Quod erat primo demonſtrandum.

Contrà verò, Parabolam ſectione Coni factam talem eſſe qualem nos deſcripſimus (nempe quadrata ordinatim-applicatarum habere diametris interceptis proportionalia) ſupra demonſtratum eſt prop. 8 & 12.

Eadem igitur eſt Parabola quæ ab Apollonio (aliíſq;) & quæ a nobis definitur. Quod oſtendiſſe par erat.

Sed & eâdem opera docuimus, *Conum conſtruere, eiq; datam Parabolam ita aptare, ut data ipſius diameter fiat Diameter-ex-generatione.* Atq; etiam Theorematice verum eſſe, *Parabolæ diametrum quamlibet fieri poſſe (in aliquo ſaltem Cono) diametrum-ex-generatione; & quomodo illud fiat.* (quamvis & illud aliis mille modis fieri poſſit.)

An verò univerſaliter verum ſit, *Datam Parabolam dato Cono ita aptari poſſe, ut data ipſius diameter fiat diameter-ex-generatione*, eſt alia diſquiſitio. Eſt autem & illud verum, modò datæ diametri ad ſuas ordinatim-applicatas obliquitas major non ſit quam obliquitas Axis aſſignati Coni ad baſin ſuam. Si ſecus autem; illud non fiet dummodo ſolum circulum pro Coni baſe agnoſcimus. Si verò admittatur, ut non modo Circulus, ſed & Ellipſis quælibet, pro baſe Coni reputetur; etiam univerſaliter illud verum erit, neq; determinatione indigebit Theorema. Hoc autem obiter tantum ſine Demonſtratione moneo; quoniam nec illud eſt hujus loci, nec mihi animus eſt ad ſingulas minutias deſcendere. Ad reliquas igitur Parabolæ affectiones calculo comprobandas feſtino.

PROP. XXII.

Corollaria.

P*Atet ex dictis*; Quod cum ſit (ut oſtenſum eſt) $p^2 = ld$; erunt, in Parabolâ, Diameter-intercepta, Ordinatim-applicata, & Latus-Rectum, continuè proportionalia.

Adeoq;, Datis eorum duobus quibuſvis, etiam reliquum (magnitudine) datur. Nempe,

$$\text{In Parabolâ}\begin{cases}\text{Ordinatim-applicata, } p=\sqrt{ld}.\\ \quad\text{ejuſq; quadratum, } p^2=ld.\\ \text{Latus-Rectum, } l=\frac{p^2}{d}.\\ \text{Diameter-intercepta, } d=\frac{p^2}{l}.\end{cases}$$

Patet etiam; Ordinatim-applicatas, prout longius a vertice applicantur, ita ſemper augeri, (cùm ipſarum quadrata ſint interceptis diametris, hoc eſt, diſtantiis punctorum-applicationis a vertice, proportionalia.)

Et propterea, Parabolam ejuſmodi curvam eſſe, quæ per ſe figuram non comprehendet; cum crura perpetuo magis divaricentur, nec ſint unquam (extra punctum verticis) coitura.

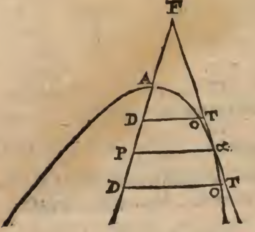
PROP. XXIII.

De Rectâ Parabolam contingente.

SI, ſumpto ubivis in Parabolæ diametro puncto P, cui ordinatim-applicetur Pα; diameter PA extra Parabolam continuetur ut fiat continuatio AF, ipſi AP diametro interceptæ æqualis; recta Fα ducta, Parabolam in puncto α continget. *Et contra*; Si Parabolam in α contingat recta αF, diametro productæ occurrens in F; erit AF (continuatio) ipſi AP (diametro-interceptæ) æqualis.

Nam ſumpto, in eâdem diametro, puncto quovis D, cui ordinatim-applicetur DO, quæ ad rectam Fα pertingat in T; Dico punctum T vel idem eſſe cum puncto α, vel extra Parabolam cadere; hoc eſt, rectam DT vel æqualem eſſe rectæ DO (ſi nempe puncta D, P, coincidant,) vel (ſi alibi ſumatur D) longiorem.

Eſto enim (ob commodiorem calculum) $P\alpha = p$, $PA = d$ (ideoq; $PF = 2d$,) $PD = a$, (ideoq; $DA = d \pm a$, $DF = 2d \pm a$, variatis nempe ſignis +, −, prout ſupponitur punctum D infra vel ſupra punctum P aſſumi.)



Erit igitur (propter Parabolam) PA.DA :: Pαq.DOq. hoc eſt, $d . d \pm a :: p^2 . \frac{d \pm a}{d} p^2 =$ DOq.

Et (propter ſimilia triangula) PF.DF :: Pα. DT. hoc eſt, $2d . 2d \pm a :: p . \frac{2d \pm a}{2d} p =$ DT. hujusq; quadratum $\frac{4d^2 \pm 4da + a^2}{4d^2} p^2 =$ DTq.

Eſt igitur differentia quadratorum DTq − DOq $= \frac{d \pm a}{d} p^2 - \frac{4d^2 \pm 4da + a^2}{4d^2} p^2 = \frac{a^2}{4d^2} p^2$. Quæ quidem vel aliqua eſt, ſi puncta P, D, diſtent, (ſitq; propterea a quantitas realis;) vel omnino nulla, ſi coincidant puncta P, D; (evaneſcente quippe quantitate a, adeóq; & ipſius multiplicibus omnibus.) Hoc eſt, quadrata DTq, DOq, & propterea eorum latera DT, DO, vel æqualia ſunt, ſi ſumatur punctum D idem atq; P; vel illud majus eſt, ſi alibi ſumatur D. Et propterea, cum rectæ αF (quantumvis utrinq; productæ) ſingula puncta, ipſo α excepto, ſint extra parabolam; ea Parabolam in unico puncto α contingit. Quod erat Demonſtrandum.

Eſtq; hæc noſtra demonſtratio multo expeditior, quam quæ ab Apollonio aliiſq;, (adhibito Cono, variiſq; lemmatis præmiſſis) adducuntur.

Si verò propoſitio hæc non fuiſſet antehac excogitata, ſed a nobis jam quærenda: *Illud Analytice ſic fieri poſſit.*

Supponamus rem quaſi jam factam; contingentem αF, diametro productæ occurrere in F: & quærenda ſit longitudo rectæ PF.

Retineatur eadem quæ prius figura; eademq; ſymbola, niſi quod pro PF (nondum cognita) ſubſtituatur f, adeoq; pro DF, $f \pm a$. Erunt igitur (ut prius) PA . DA :: Pαq . DOq $= \frac{d \pm a}{d} p^2$. Et PF . DF :: Pα . DT . (hoc eſt, $f . f \pm a :: p . \frac{f \pm a}{f} p =$ DT. Et $\frac{f^2 \pm 2fa + a^2}{f2} p^2 =$ DTq.

Eſt item (propter tangentem) DT $\geqq$ DO (hoc eſt, DT æqualis vel major quàm DO; illud quidem ſi D, P, coincidant; hoc, ſi ſecus) & DTq $\geqq$ DOq, hoc eſt $\frac{f^2 \pm 2fa + a^2}{f2} p^2 \geqq \frac{d \pm a}{d} p^2$; & (utrumq; multiplicando in $df2$ & dividendo per p^2) erit $df^2 \pm 2dfa + da^2 \geqq df^2 \pm f^2 a$: & (auferendo utrinq; $df2$, atq; dividendo per $\mp a$) $2af \pm da \geqq f^2$.

Deniq; ponendo D P idem punctum (ut evaneſcat quantitas a, adeoq; & da,) erit $2df = f^2$, hoc eſt $2d = f$. Quod eſt ipſum Theorema quod inveſtigandum erat, quodq; modo demonſtravimus.

Converſa propoſitionis propoſitæ; nempe *Parabolæ tangentem αF diametro PA productæ occurſuram, & quidem ita ut abſcindat rectam AF ipſi AP æqualem*; ex dictis ſatis patet, vel inde ſaltem facile deduci poteſt.

Atq; etiam; *Rectam AF Parabolam in unico puncto contingere.*

Item, *Ab eodem puncto F, atq; ad eaſdem partes, rectam aliam quæ Parabolam contingat duci non poſſe.*

Et, *Parabolam in eodem puncto α non niſi unicam rectam contingere poſſe.*

Adeoq; *In locum inter curvam αA rectamq; contingentem αF, aliam rectam lineam cadere non poſſe*: (Hoc eſt, prout ego alibi peculiari tractatu fuſius demonſtravi, *Angulum qui Contactus dicitur, eſſe angulum nullius magnitudinis, (ſive non-Angulum.)*

Verùm cum ea non difficulter calculo demonſtrari poſſint (demonſtrationibus præcedenti non abſimilibus) ego, partim ut tyronibus quo ſe exerceant relinquam, partim ne aliis tædio ſim, eis ſigillatim demonſtrandis ſuperſedeo.

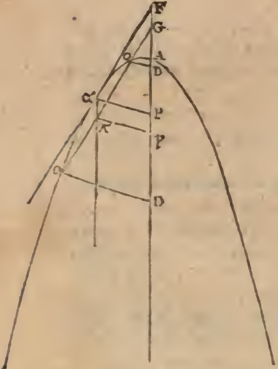
PROP. XXIV.

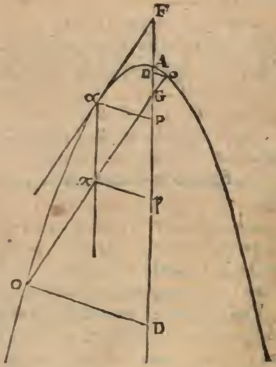
De Parabolæ Diametris.

SI a puncto quovis α in Parabolæ curvâ Aα, ducatur recta $\alpha\pi$ parallela diametro AP: Erit $\alpha\pi$ ſic ducta ejuſdem Parabolæ diameter; verticem habens α, & Ordinatim-applicatas πO rectæ αF (Parabolam in vertice α contingenti) parallelas.

Libet hanc *Propoſitionem primo Analyticè examinare*, deinde & Syntheticè demonſtrare.

Supponamus igitur rem ita eſſe ut perhibetur: adeóq; inſcriptam OO, rectæ αF parallelam, atq; in π biſectam ſintq;





rectæ OD, OD, αP, diametro AP, ordinatim applicatæ, adeóq; invicem parallelæ: quibus etiam parallela ducatur πp, quæ igitur (propter parallelas) biſecabit (ut rectam OO, ſic) rectum DD. Deniq; recta OO (producta ſi opus) occurrat diametro

AP (ſaltem productæ) in G. (occurſuram autem certum eſt, cum ipſi parallela αF eidem diametro occurrat, puta in F, per præcedentem) Eruntq; (propter parallelas) $Pp = \alpha\pi = FG$: & propterea $PF = pG$.

Tum ſubſtitutis (ob commodiorem calculum) idoneis ſymbolis, eſto $P\alpha = p$. $PA = d$. (ideóq; per præced. $PF = pG = 2d$.) $Pp = \alpha\pi = FG = g$. (ergo $pA = pP + PA = d + g$) $pD = q$. (ideoq; $DA = pA \pm pD = d + g \pm q$. & $DG = pG \mp pD = 2d \mp q$.)

Erit igitur (propter Parabolam) $PA . DA :: P\alpha q . DOq$. hoc eſt $d . d + g \pm q :: p^2 . \frac{d + g \pm q}{d} p^2 = DOq$.

Item (propter ſimilia triangula) $PF . PA :: DG . DO$. hoc eſt $2d . p :: 2d \mp q . \frac{2d \mp q}{2d} p = DO$. Et (ſumendo quadrata)

$$\frac{4d^2 \mp 4dq + q^2}{4d^2} p^2 = DOq = \frac{d + g \pm q}{d} p^2.$$

Ergo (utrinq; dividendo per p^2 & multiplicando per $4d^2$) $4d^2 \mp 4dq + q^2 = 4d^2 + 4dg \pm 4dq$. hoc eſt (ſublatis utrinq; æqualibus) $q^2 = 4dg$. Adeoq; inventa eſt quantitas q, adeóq; & puncta D, D. quibus Ordinatim applicantur DO, DO. Vera igitur eſt propoſitio.

Illud Synthetice ſic demonſtrabimus, premendo Analyſeos veſtigia.

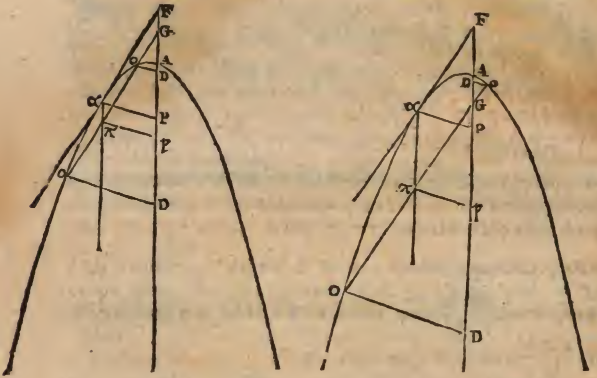
Diametro AP ducatur parallela $\alpha\pi$, per cujus punctum quodvis (intra parabolam) π, ducatur recta πG diametro occurrens in G, & parallela tangenti αF occurrenti diametro in F. Dico $\alpha\pi$ ejuſdem Parabolæ diametrum eſſe eíq; ordinatim poni πG.

Diametro AP ordinatim applicetur αP, eíq; parallela ducatur πp diametro occurrens in p. Et ſunto ſymbola $P\alpha = p$, $PA = d$. $FG = \alpha\pi = g$.

Tum ſumantur in diametro utrinq; a puncto p, æquales rectæ $pD = (\sqrt{4dg} =) 2\sqrt{dg}$. (hoc eſt, duplum mediæ proportionalis inter AP, $\alpha\pi$, rectas.) atq; punctis D, D, ordinatim ponantur DO, DO, rectæ πG occurrentes in O, O; quæ cum parallelæ ſint rectæ πp, ſicut recta DD (ex conſtructione) biſecatur

ſecatur in p, erit ideo & OO (propter parallelas) biſecta in π.

Reſtat ut oſtendam rectam illam OO (biſectam in π) Parabolæ inſcriptam eſſe, (ut απ recta biſecans ſit diameter,) hoc eſt, puncta OO eſſe in Parabolæ Curva. Quod ſic probatur.



Eſt $pA = PA + Pp = d+g$. $DA = pA \pm pD = d+g \pm 2\sqrt{dg}$. $pG = PF = 2d$. $DG = pG \underset{\sim}{\pm} pD = 2d \underset{\sim}{\pm} 2\sqrt{dg}$.

Tum (propter parabolam) ut PA, ad DA; ſic Pαq quadratum ordinatim-applicatæ puncto P, ad quadratum ordinatim-applicatæ puncto D: hoc eſt $d . d+g \pm 2\sqrt{dg} :: p^2 . \frac{d+g \pm 2\sqrt{dg}}{d}p^2$. quod igitur eſt quadratum ordinatim-applicatæ puncto D.

Sed & tantundem eſt quadratum rectæ DO. Nam (propter ſimilia triangula) PF.Pα :: DG.DO hoc eſt, $2d . p :: 2d \underset{\sim}{\pm} 2\sqrt{dg} . \frac{2d \underset{\sim}{\pm} 2\sqrt{dg}}{2d}p = DO$. Ejuſq; quadratũ $DOq = \frac{4u^2 + 4dg \pm 8d\sqrt{dg}}{4u^2}p^2 = \frac{d+g \pm 2\sqrt{dg}}{d}p^2$.

Eſt igitur quadratum rectæ DO æquale quadrato ordinatim applicatæ puncto D; adeoq; recta DO ipſi ordinatim-applicatæ æqualis. Sed & puncto D ordinatim-ponitur recta DO (ex conſtructione) ergo ordinatim-applicata eſt: punctaq; O O propterea ſunt in ipſa Parabolæ curvâ, adeóq; OO recta Parabolæ inſcripta. Sed & eam (atq; eâdem ratione ipſi parallelas inſcriptas omnes) biſecat recta $\alpha\pi$. Eſt igitur (per def.) $\alpha\pi$ diameter, eiq; ordinatim-applicata πO, (ordinatim-inſcriptæ ſemiſſis.) Quod erat demonſtrandum.

Monendum autem hic eſt, quòd cum (tam in Analyſi quam in Syntheſi) dicimus duarum rectarum DG, alteram quidem æqualem eſſe pG $\sim$ pD, hoc eſt, differentiæ rectarum pG, pD, fieri quidem poteſt ut quandoq; pG (nempe quoties recta OO diametrum AP non tranſit) quandoq; pD (nempe ubi OO tranſit AP) major eſſe: Adeoq; pG $\sim$ pD, nunc per pG $-$ pD, nunc per pD $-$ pG, interpretandũ erit. Verùm hoc calculum non omnino perturbat; quoniã ea quantitas in operationis progreſſu quadranda occurrit: quo caſu, utrumvis contingat, eadem quadrata prodibunt. Nempe cum ſit in Analyſi $\frac{2d \overset{+}{\sim} q}{2d} p = DO$, ſive exponatur $\frac{2d \pm q}{2d} p = DO$ (ut ubi O O non tranſit AP,) ſive $\frac{q \pm 2d}{2d} p = DO$ (ut ubi tranſit,) utrovis modo erit $\frac{4d^2 + q^2 \pm 4dq}{4d^2} p^2 = DOq$. Et pariter contingit in Demonſtratione Syntheticâ. Quod monuiſſe ſufficit.

Poſſent hic alia Theoremata multa ſigillatim oſtendi, puta.

Quodlibet Curvæ Parabolicæ punctum alicujus Diametri verticem eſſe.

Adeoq; *In qualibet Parabola infinitos eſſe Vertices, atq; Diametros infinitas.*

Item; *Parabolæ Diametros omnes eſſe invicem Parallelas.*

Et; *Quamlibet rectam (in eodem plano) cuilibet Parabolæ Diametro parallelam, ejuſdem Parabolæ Diametrum etiam eſſe; eiq; in uno aliquo, & quidem unico, puncto occurrere.*

Item; *Quamlibet in eodem plano rectam, per aliquod intra Parabolam punctum tranſeuntem, Diametro non parallelam, in binis punctis Parabolæ occurrere; & alicui Diametro Ordinatim-poſitam eſſe.*

Et; *Quæ vel alicui Parabolæ Diametro Ordinatim-poſita eſt, vel Diametrum aliquam quocunq; modo ſecat, vel quæ Parabolam ſecat (aut ipſi occurrit) in binis punctis; nec illius Parabolæ Diametrum eſſe, nec ipſius Diametro ulli parallelam.*

Item; *Quæ Parabolæ Diametro alicui in vertice occurrit ordinatim-applicatis parallela, Parabolam in illo puncto contingere.*

Et; *Quæ Parabolam contingit, Diametri per contactûs punctum tranſeuntis Ordinatim applicatis parallelam eſſe: adeoq; eidem Diametro Ordinatim poſitam.*

His autem, aliiſq; conſimilibus, ſigillatim demonſtrandis, non immorandum eſſe ſentio; Cùm ea vel in progreſſu præcedentium Demonſtrationum ſatis jam oſtenſa ſint; vel ex eiſdem principiis facilè demonſtrari poſſint.

PROP. XXV.

Effectiones Geometricæ.

EX præcedentibus, non erit difficile Geometricas Effectiones colligere. puta,

Datæ Parabolæ Diametrum invenire. Nam recta, quaſlibet duas inſcriptas parallelas biſecans, eſt Diameter.

Item, *Per datum quodvis in eodem plano punctum, rectam ducere quæ ſit Parabolæ datæ Diameter.* Inventa enim (ut prius) una qualibet diametro, recta huic parallela per datum punctum ducta, eſt Diameter quæſita.

Item, *Parabolæ Axem reperire.* Inſcriptâ nempe rectâ quæ Diametrum quamlibet ad angulos rectos ſecet; ea quæ per hujus medium punctum tranſit Diameter, eſt Parabolæ Axis.

Item, *Datæ Diametri ordinatim-applicatas poſitione invenire.* vel, quod tantundem eſt, *Angulum inclinationis invenire.* Ductis nempe binis diametro datæ parallelis rectis, utrinq; ab illa æqualiter remotis, quæ Parabolam ſecent; recta ſectionum puncta conjungens eſt datæ diametro ordinatim-applicata, reliquæq; omnes huic parallelæ.

Item, *Latus-Rectum invenire datæ in datâ Parabolâ Diametro conveniens.* Eſt enim Latus-rectum, Diametro-interceptæ & Ordinatimdinatim-applicatæ tertia continuè proportionalis.

Item, *Ad datum datæ diametri punctum ordinatim-applicatam in data Parabolâ ducere.* Eſt enim interceptæ-diametro & lateri-recto media proportionalis, Diametro, juxta inclinationis angulum, applicanda.

Item, *Ad datam diametrum, datumq; Latus-rectum, Parabolem in dato inclinationis angulo ducere.* Nam poſitis ad datam Diametrum in dato angulo quolibet ordinatim-applicatis, curva per earum omnium extremitates æquabiliter ducta eſt Parabola.

Verum ego harum omnium effectionum demonſtrationes omitto; partim ut tædio non ſim, partim ut ſit quo ſe exerceant tyrones, præſertim cum illæ ex prædictis facilè poſſint elici. Atq; eiſdem de cauſis multa alia & Theoremata & Problemata lubens prætereo; cùm nobis non ſit animus vel ſingulis minutiis inſiſtendi, vel propoſitiones citra neceſſitatem multiplicandi. Quod etiam de ſequentibus intelligendum erit.

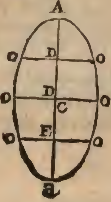
PROP. XXVI.

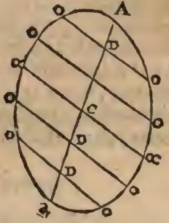
De Ellipſi abſolute conſideratâ.

CUm ſit in Ellipſi (ut oſtenſum eſt, prop. 16.) Quadratum ordinatim-applicatæ $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$ Licebit jam (ut prius Parabolam, ſic) Ellipſin eo charactere inſignitam, ſuo Cono eximere, atq; abſolutè quidem & univerſaliter contemplari, acſi nullam omnino ad Conum relationem haberet; ut nec circulus (quæ quidem una eſt Ellipſeos ſpecies) habere vulgò cenſetur.

Ellipſin igitur appello eam (ſive lineam curvam in plano deſcriptam, ſive figuram planam ejuſmodi curvâ terminatam,) cujus ordinatim-applicatarum ſingularum quadrata, æquantur differentiis binorum rectangulorum; quorum quidem Majora ſunt interceptis-Diametris, Minora vero earundem quadratis proportionalia. (Nempe $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$. Sunt enim rectangula ld, ipſis d diametris interceptis proportionalia, propter communem altitudinem l: ipſa vero $\frac{l}{t}d^2$ diametrorum interceptarum quadratis d^2 proportionalia, propter communem rationem $\frac{l}{t}$.)

Diametrum, Diametros-interceptas, Verticem, Ordinatim-poſitas, Ordinatim-inſcriptas, (ſive *Ordinatim-ſubtenſas,*) *Ordinatim-applicatas,* atq; *Punctum-applicationis*; eodem ſenſu hic accipio quo ſuprà de Parabolâ iiſdem uſus ſum.





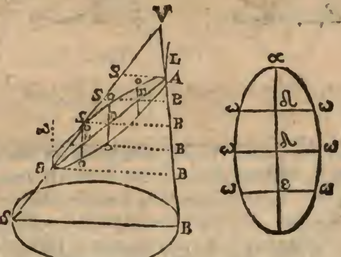
Rectam notâ l inſignitam, (lineam puta imaginariam, quæ cum interceptis-diametris, continere ſupponitur rectangula Majora, diametris-interceptis proportionalia,) appello *Latus-Rectum.*

Rectam verò alteram, quæ nota t deſignatur, (quam quidem ſupponimus Diametri ſegmentum eſſe, a vertice verſus concavam Curvæ partem ductam; quæq; ita ſe habet ad latus rectum ut diametrorum-interceptarum quadrata ad rectangula Minora, illis quadratis proportionalia,) *Diametrum tranſverſam* appello; (ut quæ oppoſitos vertices conjungit, puta Aa, ut mox dicetur:) ejuſq; punctum medium, (quod in ipſa Diametro intra Ellipſin jacere ſupponimus, nempe intra oppoſitos vertices,) appello *Centrum.*

Ellipſin a nobis definitam eandem eſſe cum ea quam definit Apollonius, (niſi quod nos etiam circulum, ſeu circuli Peripheriam, eâdem voce includamus, quam excludit Apollonius;) eodem fere progreſſu demonſtrari poteſt, quo ſupra oſtendimus Parabolam noſtram eandem eſſe atq; illius.

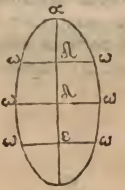
Nempe, Ellipſi Apollonianæ, Sectione Coni factæ (quæ ab Apollonio deſcribitur p. 13. lib. 1. Con.) univerſaliter convenire definitionem noſtram; jam probatum eſt prop. 13. & 16.

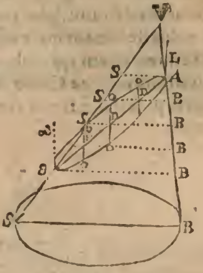
Ellipſin a nobis definitam quamlibet (modò circulum ſeu Peripheriam excipias, quam ego ſub eâ voce comprehendo, contra quàm Apollonius,) ita Cono aptari poſſe ut conditiones eas habeat quas poſtulat Ellipſis Apolloniana; ſic probatur.



Exponatur Ellipſis quælibet a nobis definita, αω, cujus ordinatim-applicatarum quadrata ſint $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$. Dico hanc Cono ita aptari poſſe ut poſtulatur.

Ducantur enim rectæ $Aa = t$, $AS = l$, continentes angulum SAa quemcunq; acutum, (modo major ſit complemento anguli inclinationis in Ellipſe expoſita, quem faciunt ordinatim-applicatæ cum expoſitâ diametro;) ipſiq; AS parallela ponatur $aB = Aa = t$, angulum faciens $AaB = SAa$: (ſaltem tantæ ſint longitudinis AS, aB, ut ſit $AS \times aB = lt$; modo interim non ſint AS, aB, invicem æquales; eo enim caſu non Conus, ſed Cylindrus prodiret:) Et jungantur rectæ aS, BA, quæ continuatæ coeant in V, complentes triangulum VaB, (ſi nempe aB major ſit quam AS, prout jam ſupponimus; vel, ſi ſecus, triangulum VAS:) quod eſto triangulum per axem Coni mox conſtruendi.





Deinde ſuper rectas Aa, aB, duo plana ita erigantur ut communis earum ſectio aω faciat cum rectâ aB angulum rectum, cum rectâ verò Aa angulum æqualem angulo inclinationis Ellipſeos propoſitæ. Hoc enim omnino fieri poſſe conſtat: Si enim erigatur in puncto a recta aω, quæ ſit recta plano trianguli, (adeóq; utroſq; angulos ωaA, ωaB, rectos faciat per 3 d 11,) circumvolvatur circa rectam aB ut axem, invariato angulo ωaB, donec ad ſitum plani VaB perveniat, faciatq; in plano trianguli angulum ωaA acutum; qui minor erit angulo (acuto, intellige, niſi uterq; rectus ſit,) inclinationis Ellipſeos expoſitæ, (cum ſit, ex conſtructione, angulus AaB complemento inclinationis major;) neceſſe eſt ut in tranſitu aliquando fecerit angulum, inclinationis angulo æqualem, (factus enim eſt tranſitus ab angulo recto, adeoq; debito majori, vel ſaltem æquali, ad angulum debito minorem;) adeoq; tunc fuerit in ſitu debito to, ut ſit duorum planorum communis ſectio qualis imperatur.

In plano autem aωB ſic poſito, ſcribi intelligatur circulus diametrum habens aB, qui ſit baſis Coni; aliiq; huic paralleli conum complentes, juxta prop. 5; qui plano Aωa ſectus Ellipſin exhibebit, per prop. 7. cujus ordinatim-applicatæ eandem ad Diametrum inclinationem habebunt, quam quæ in Ellipſi expoſitâ, adeóq; ſimiliter poſitæ ſunt; eruntq; etiam longitudine æquales, ut probari poterit per prop. 13 & 16. Congruunt igitur Ellipſis expoſita, & quæ in Cono exhibetur. Adeóq;, eadem eſt Ellipſis a nobis definita (niſi quod nos etiam circulum ea definitione comprehendamus) atq; Ellipſis Apollonii. Quod erat demonſtrandum.

Sed & eadem opera docuimus, *Conum conſtruere, eiq; datam Ellipſin ita aptare, ut data Ellipſeos Diameter fiat Diameter-ex-generatione.* Atq; etiam Theorematice verum eſſe, *Ellipſeos diametrum quamlibet, fieri poſſe, in aliquo ſaltem Cono, Diametrum-ex generatione.*

PROP. XXVII.

De Ellipſeos Diametro-tranſverſa & Verticibus-Oppoſitis.

SI Ellipſeos Diameter-intercepta AD intelligatur (a vertice A verſus concavam curvæ partem) tanta aſſumi, ut rectæ quam t diximus ſit æqualis, (hoc eſt, ita ſe habeat ad latus rectum, ut interceptarum-diametrorum quadrata ad Rectangula quæ diximus Minora) erit & reliquus ipſius terminus D in Ellipſeos curvâ. (Nam ſi $d = t$, erit $\frac{l}{t} d^2 = \frac{l}{d} d^2 = ld$; ideoq; $e^2 = ld - \frac{l}{t} d^2 = ld - ld = 0$. hoc eſt, Ordinatim-applicata evaneſcit, puncto nimirum perimetri cum puncto diametri coincidente.)

Unde patet; Quamlibet Ellipſeos Diametrum binos habere vertices, (ut quæ in binis punctis perimetro occurrit;) quos *Vertices Oppoſitos* appellamus. Diame-

tér

ter verò binis illis verticibus terminata, illa eſt quam *Diametrum-tranſverſam* jam diximus.

Sed & inde liquet, Ellipſin ex earum curvarum numero eſſe quæ in ſe recurrunt, adeóq; figuram comprehendunt,

Ellipſeos autem Diameter-intercepta, diametro-tranſverſâ, longior eſſe non poteſt; tunc enim $\frac{l}{t}d^2$, quod binorum rectangulorum minus eſſe ſupponitur, majus eſſet quã ld, quod ſupponnitur eorum majus eſſe. Si autem tale quid ſupponeretur; pro Ellipſi, prodiret Hyperbola, eandem habens diametrum-tranſverſam, verticem verò eum qui eſt aſſumpto (in Ellipſeos diametro-tranſverſa) vertex oppoſitus; quíq; ſupponitur Ellipſeos diameter intercepta (tranſverſa major) erit aggregatum diametrorum tranſverſæ & interceptæ in Hyperbola. Prout ex Hyperbolæ doctrina, poſt-tradenda, colligi poterit.

PROP. XXVIII.

Corollaria.

P*Atet ex præmiſſis*; Cùm ſit $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$ Horum in Ellipſi quatuor, *Diametri-tranſverſæ*, *Diametri-interceptæ*, *Lateris-Recti*, & *Ordinatim-applicatæ*; datis tribus quibuſvis, etiam & reliquum (magnitudine) dari. Nempe (diſponendo & reſolvendo æquationes) erit.

In Ellipſi

Ordinatim-applicata, $e = \sqrt{:}\, ld - \frac{l}{t}d^2 : = \sqrt{:}\, \frac{td - d^2}{t}l.$

Ejuſq; quadratum, $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2 = \frac{td - d^2}{t}l.$

Latus rectum, $l = \frac{e^2}{td - d^2}t.$

Diameter-tranſverſa, $t = \frac{td - d^2}{e^2}l.$

Diameter-intercepta, $d = \frac{1}{2}t \pm \sqrt{:}\, \frac{1}{4}t^2 - \frac{t}{l}e^2.$

Et propterea, Diſtantia puncti applicationis a Centro, $c = \sqrt{:}\ \frac{1}{4}t^2 - \frac{t}{l}e^2$.

Patet etiam; Ut Diameter-tranſverſa ad Diametrum-interceptam, ſic eſſe Rectangula quæ diximus Majora (diametris interceptis proportionalia) ad Rectangula quæ diximus Minora (earum quadratis proportionalia,) nempe, $t.\ d :: ld.\ \frac{l}{t}d^2$.

Item; Ut Diameter-tranſverſa ad Latus-rectum, ſic quadrata Diametrorum-interceptarum ad Rectangula Minora, (quadratis illis proportionalia.) Nempe $t.l :: d^2 : \frac{l}{t}d^2$.

Item; Ut Diameter-tranſverſa, ad interceptam; ſic tranſverſæ reſiduum, ad quartam; quæ, ducta in Latus-rectum, Rectangulum efficit æquale Quadrato Ordinatim applicatæ. Nempe $t.\ d :: t - d.\ \frac{t-d}{t}d = \frac{td-d^2}{t}$. Et $\frac{td-d^2}{t}l = e^2$.

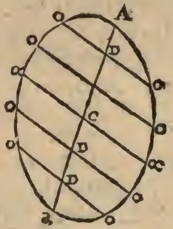
Item; Ut Diameter-tranſverſa, ad Latus-rectum; ſic Rectangulum ſegmentorum tranſverſę, ad Quadratum Ordinatim-applicatę. Nempe $t.\ l :: td - d^2.\ \frac{td-d^2}{t}l = e^2$,

Vel; Ut Rectangulum ſegmentorum Diametri-tranſverſę, ad Quadratum Ordinatim-applicatę; ſic eſſe Diametrum-tranſverſam ad Latus-Rectum. (Unde cujuſlibet ellipſeos Latus-Rectum commodè reperitur.) Nempe $td - d^2.\ e^2 :: t.\ l = \frac{c^2}{td - u^2}t$.

Inde ſequitur; Quadrata Ordinatim-applicatarum eſſe Rectangulis ſegmentorum Diametri-tranſverſę proportionalia. Sunt enim ubiq; ut l ad t.

Adeoq;, Omnium ad eandem Diametrum-applicatarum, eam eſſe maximam quę diametri-tranſverſę puncto medio (quod Centrum diximus) applicatur ut Cα. (Quoniam nempe omnium rectangulorum ejuſdem rectæ ſegmentis comprehenſorum, illud maximum eſt quod biſegmentis comprehenditur; hoc eſt, quadratum ſemiſſis.) Nempe, ubi $d = \frac{1}{2}t = t - d$, erit $td - d^2 = \frac{1}{4}t^2$. ideoq; $e^2 \left(= \frac{td - d^2}{t} l\right) = \frac{1}{4}tl$, quadratum Ordinatim-applicatæ maxime.

Reliquarum vero Ordinatim-applicatarum quadrata (adeóq; & ipſæ Ordinatim-applicatæ) quæ centro propiùs applicantur ſunt remotioribus majora, quæ autem habent applicationum puncta α centro æqualiter remota ſunt invicem æqualia. Eſto enim diſtantia puncti applicationis a centro quælibet $CD = c$, ideoq; ſegmenta diametri-tranſverſæ $\frac{1}{2}t + c$, $\frac{1}{2}t - c$; erit eorum rectangulum $\frac{1}{4}t^2 - c^2$ $(= td - d^2;)$ & e^2 $\left(= \frac{td - d^2}{t} l\right) = \frac{\frac{1}{4}t^2 - c^2}{t} l$: adeoq; prout quantitas c augetur, ordinatim-applicata minuitur (non quidem proportionaliter, minuitur tamen, ut patet;) & contra; omnium vero maxima quæ centro applicatur (ut dictum eſt) ubi c evaneſcit propter coincidentiam punctorum C, D.

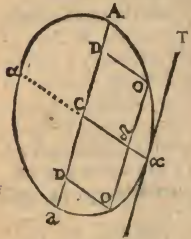


Quodq; de Ordinatim-Applicatis dictum eſt idem & de Ordinatim-inſcriptis (utpote applicatarum duplis) intelligendum eſt; nempe eam eſſe maximam quæ per centrum ordinatim-inſcribitur; & reliquarum quidem centro propiores remotioribus majores; & æqualiter utrinq; a centro remotas æquales eſſe.

PROP. XXIX.

De Ellipſeos Diametris conjugatis.

REcta Diametro Parallela, ut αT, per illius quæ diametri-tranſverſę puncto medio ſeu centro Ordinatim-applicatur (quę omnium maxima eſt, ut oſtenſum eſt; eſtq; ad eaſdem partes unica, ut patet,) extremitatem ducta; Ellipſin in illo puncto (& quidem ſolo) contingit. (Secus enim non eſſet illa omnium, [*]verſus eaſdem partes, Ordinatim-applicatarum maxima.)



Omnes autem, huic contingenti parallelę, (puta OδO) eidem Ellipſi inſcriptę, ab illâ (quam diximus) ordinatim-applicatâ maximâ (ad perimetrum utrinq; continuatâ, ut αCα) biſecantur; adeoq; & ipſa eſt (per def.) ejuſdem ellipſeos diameter: oppoſitos-vertices habens αα.

---

[*] Cum enim Ordinatim-applicatæ DO DO ſint (propter parallelas) æquales, æqualiter diſtabunt a Centro applicationum-puncta D D (ut modo oſtenſum eſt) adeoq; biſecantur tam DD in C, quam OO in δ: (propter parallelas:) eſtq; αδ diameter, eiq; ordinatim-applicantur δO, CA.

Duas vero hujuſmodi (ejuſdem ellipſeos) diametros, (puta Aa, αα) ſibi mutuo ordinatim-poſitas, *Diametros Conjugatas* dicimus, (quę ſe mutuo biſecant in communi centro C;) punctáq; Aα, vel aα, *conjugatos vertices* (in Conjugatis quippe diametris repertos) appellamus.

Ellipſin autem binis Diametris Conjugatis, earumq; quatuor verticibus ſic inſtructam, poſſumus quidem quaſi pro quatuor ſive Ellipſibus ſive Sectionibus habere, quarum quælibet ſuam habet verticem, ſuamq; Diametrum, eíq; Ordinatim-applicatas & Latus-rectum. Quarum quidem quatuor, binas αAα, αaα, *Oppoſitas* dicas, (ut & Aαa, aαA,) quarum nempe vertices ſunt oppoſiti; binas verò αAα, Aαa, vel Aαa, αaα, (quarum vertices ſunt conjugati, utpote in conjugatis diametris poſiti,) *Conjugatas* dicas.

Quamvis enim *Sectionum Oppoſitarum* & *Conjugatarum* nomine, *Hyperbolæ* ut plurimum intelligi ſoleant: nihil tamen impedit quo minùs (ut Hyperbolas, ſic) *Ellipſes* Oppoſitas & Conjugatas dicamus: vel ſaltem (ſi id nominis diſpliceat) Ellipſin dicamus *Oppoſito* & *Conjugato* ſitu conſideratam. Id ſaltem intereſt inter quatuor Sectiones Hyperbolicas, totidemq; Ellipticas, (conjugatis Diametris accommodatas,) quod hæ quidem (productæ) ſe mutuò continuant (adeóq; Ellipſis tota ad quemvis quatuor verticum referri poterit,) illæ autem non ita. Verùm hæc melius fortaſſe percipientur quum deinceps de Hyperbolis Oppoſitis & Conjugatis dictum erit.

Interim notandum eſt, Oppoſitarum ſive Ellipſeωn ſive Verticum (perinde enim eſt utrum dicatur,) Diametrum tranſverſam communem eſſe, & quidem Latera-recta æqualia, (vel, ſi mavis, idem; nos enim de lateris-recti ſitu nullam prorſus conſiderationem habemus, ſed ſolummodo de ipſius magnitudine, neq; enim omnino refert vel ubi, vel an omnino ſcribatur aut ſcribi intelligatur,) & quidem eaſdem Ordinatim-applicatas; Diametros-interceptas verò oppoſitas habent, quæ quidem ſimul æquantur diametro-interceptæ.

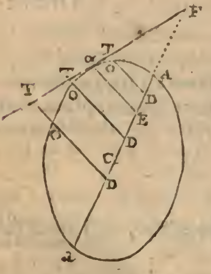
PROP.

PROP. XXX.

De recta Ellipſin-Contingente.

Recta Ellipſin contingens in conjugatarum Diametrorum alterutrius Vertice, cum reliquâ (quantumvis utraq; producatur) nunquam concurret, (utpote quę ipſi parallela eſt, ut modo oſtenſum erat.) Quæ verò Ellipſin contingit recta, alibi quàm in conjugato vertice, cum diametro (productâ) concurret quidem. Punctum autem concurſus ſic inquiremus.

Supponatur Tangens αF, occurrens in F, productæ diametro EA, cui ordinatim-applicata ſit $E\alpha$. Supponatur etiam ubivis Ordinatim-applicata DO, Tangenti occurrens in T. Sitq; centrum C; & Oppoſiti vertices Aa; quorum ſupponatur A puncto E propior, a remotior.



Dicantur autem (ob commodiorem calculum) $F\alpha = e$ $EA = d$, $Aa = t$, (ideóq; $Ea = t - d$, $EC = \frac{1}{2}t - d$,) $EF = f$, $ED = a$, (ideoq $DF = f \pm a$, $DA = d \pm a$, $Da = t - d \mp a$.)

Tum (quia quadrata ordinatim-applicatarum ſunt rectangulis ſegmentorum Diametri-tranſverſæ proportionalia, ut oſtenſum eſt prop. 28.) erit $EA \times Ea . DA \times Da :: E\alpha q . DOq$. hoc eſt, $td - d^2 . td - d^2 - a^2 \pm ta \mp 2da :: e^2 . \frac{td - d^2 - a^2 \pm ta \mp 2da}{td - d^2} e^2 = DOq$.

Item (propter ſimilia triangula) $EF . E\alpha :: DF . DT$. hoc eſt, $f.e :: f \pm a . \frac{f \pm a}{f} e = DT$ ejúſq; quadratum $\frac{f^2 + a^2 \pm 2fa}{f^2} e^2 = DTq$.

Tum (propter Tangentem) $DTq \geq DOq$ (nempe æqualia, ſi D E puncta coincidant; vel, ſi ſecus, illud majus,) hoc eſt, $\frac{f^2 + a^2 \pm 2fa}{f^2} e^2 \geq \frac{td - d^2 - a^2 \pm ta \mp 2da}{td - d^2} e^2$. et (utrinq; multiplicando per $\frac{td - d^2}{e^2} f^2$) erit $f^2td - f^2d^2 + tda^2 - d^2a^2 \pm 2ftda \mp 2fd^2a \geq f^2td - f^2d^2 - f^2a^2 \pm f^2ta \mp 2f^2da$. Et (deletis utrinq; $f^2td - f^2d^2$, atq; dividendo per $\pm a$) erit $\pm tda \mp d^2a \pm 2ftd - 2fd^2 \geq \mp f^2a \pm f^2t - 2f^2d$.

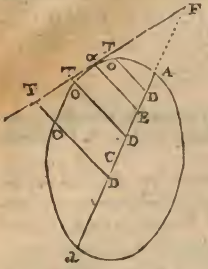
Deniq;, ponendo D E idem eſſe punctum, (ut evaneſcat quantitas $a = ED$, adeoq; & ipſius multiplicia tda, d^2a, f^2a erit $2ftd - 2fd^2 = f^2t - 2f^2d$. Et (dividendo per $2f$) $td - d^2 = \frac{1}{2}ft - fd$. (Hoc eſt, $\square AEa = \square CEF$) vel $\frac{1}{2}t - d . t - d :: d . f$. hoc eſt, EC. Ea :: EA. EF. vel (alternando) EC.EA :: Ea.EF. Quod erat inquirendum.

Quod Theorema ſic inventum hoc eſt. Si ſit Ordinatim-applicata in ellipſi E*a*, atq; ab applicationis puncto E ellipſeos diameter per propiorem verticem A continuetur ad F; ſitq;, ut diſtantia puncti-applicationis a Centro EC, ad diametrum interceptam EA, ſic reſiduum tranſverſæ-diametri Ea, ad diametrum-interceptam continuatam EF: recta *a*F Ellipſin in puncto *a* continget.

Demonſtratio (ſi opus) inſtitui poterit repetitis Analyſeos veſtigiis.

Sed & hinc concludi poteſt quod modo aliunde oſtenſum erat; nempe quod *Recta-Ellipſin in diametri vertice contingens diametro conjugatæ parallela eſt eiq; nunquam occurſura.* Nam, cum ſit EC. EA :: Ea. EF ſi (propter coincidentiam punctorum EC) prima EC nulla ſit (ſive nullius magnitudinis) quarta EF (vel CF) erit infinita (ex utravis parte ſupponatur diameter produci, ſive per A, ſive per a, indifferenter enim ſe Tangens habet ad utrumq; verticem propter applicationem in centro,) hoc eſt, EF αF nunquam concurrent (propter infinitam diſtantiam ſuppoſiti puncti converſus F) adeoq; ſunt parallelæ.

Patet etiam, *Interceptam-diametrum* EA (inter applicationis punctum & verticem propiorem) *ipſius continuatione* AF (inter verticem illum & tangentis cum diametro concurſum) *minorem eſſe.* Cum enim ſit, $EC . Ea = EC + Ca :: EA . EF = EA + AF$. Erit etiam (dividendo) $EC . Ca :: EA . AF$. At EC minor eſt quam Ca vel CA (pars toto) ergo & EA minor quam AF.



Sed & (ponendo $CA = \frac{1}{2}t = s$, & $CE = \frac{1}{2}t - d = c$, ideoq; $EA = d = s - c$, & $Ea, = t - d = s + c$) erit $EF = \frac{td - d^2}{\frac{1}{2}t - d} = \frac{s^2 - c^2}{c}$, & $CF \; (= EF + EC) = \frac{s^2}{c}$; hoc eſt $CE . CA :: CA . CF$.

Sed & hinc docemur *Rectam αF ducere quæ Ellipſin in dato puncto α contingat.* Nempe, ducta Ordinatim-applicata αE, fiat ut EG ad Ea ſic EA ad EF. juncta enim Fα Ellipſin in α contingit.

Item, *A dato extra puncto F rectam ducere Fα quæ Ellipſin contingat.* Nempe, juncta FG, & continuata, (quæ Ellipſi in A α punctis occurrat,) ut habeatur F punctum in diametri Aa continuatione; Quoniam eſt (ut modo dictum eſt) $EC . Ca = CA :: EA . AF$. ideoq; $FA . AC :: AE . EG$. Si dividatur AC in E, ſicut dividitur FC in A; & ducatur Ordinatim-applicata Eα; recta Fα juncta Ellipſin contingit.

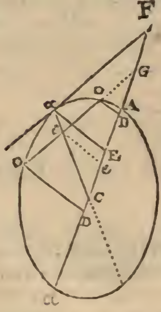
Alia liceret hîc Corollaria adjungere, qualia de Parabola innuimus prop. 23. Sed ea brevitatis ergo omittenda judico.

PROP. XXXI.

De Ellipſeos Diametris.

SI a puncto quovis α in Ellipſeos curvâ Aα, ducatur ad Centrum C recta αC; erit hæc ejuſdem ellipſeos diameter, cujus vertex α, ejúſq; Ordinatim-applicatæ rectæ ipſi αF, ellipſin in puncto α contingenti, parallelæ.

Libet hanc propoſitionem (ut prius prop. 24.) primo Analytice examinare, deinde & Synthetice demonſtrare.



Supponamus igitur rem eſſe ut perhibetur; adeóq; inſcriptam quamlibet OO tangenti αF parallelam, a recta αC (per contactum & centrum tranſeunte) biſectam in E. Sintq; rectæ OD, OD, αE, diametro AE ordinatim-applicatæ, adeóq; invicem parallelæ; quibus etiam parallela ducatur Ee eidem diametro in e occurrens, quæ propterea (ob parallelas) biſecabit (ut OO in E, ſic) DD in e. Deniq; recta OO, diametro AE, (utriſq; ſi opus eſt productis,) occurrat in G. (Saltem ſi parallela ſit, ut non poſſit occurrere; res ipſa jam demonſtrata eſt, Prop. 29.)

Supponemus etiam inpræſentiarum, verticum A a (diametri AE,) verticem A propiorem, a remotiorem, Puncto E: Item punctum E intra puncta α C incidere: rectamq; OO diametro AE productæ extra Ellipſin occurrere: Si autem horum alicui contrarium contingat (quod quidem fieri poteſt) nihilo tamen minus res ſuccedet, mutatis tantum aliquoties ſignis + −, quod operationis progreſſum neutiquam turbabit.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) $E\alpha = e$, $EA = d$,

$= d$, $Aa = t$, $Ea\ (= t - d.) = x$, $EC\ (= \frac{1}{2}t - d,) = c$, $eD = q$, $\varepsilon\alpha = \delta$, $\alpha C = \sigma$, $2\sigma - \delta = \xi$, $\varepsilon C\ (= \sigma - \delta) = \gamma$.

Tum (per præced:) EC. EA :: Ea. EF. hoc eſt $c.\ d :: x.\ \frac{dx}{c} = EF$. Et (propter parallelas, & ſimilia triangula) $C\alpha.\ \varepsilon\alpha :: CE.\ eE.$ hoc eſt $\sigma.\ \delta :: c.\ \frac{\delta c}{\sigma} = eE$. Et $C\alpha.\ C\varepsilon :: E\alpha$ $e\varepsilon :: EF.\ eG.$ hoc eſt, $\sigma.\ \gamma :: c.\ \frac{\gamma c}{\sigma} = e\varepsilon :: \frac{dx}{c}.\ \frac{\gamma dx}{\sigma c} = eG$. ideoq; $DG\ (= eG \pm eD) = \frac{\gamma dx}{\sigma c} \pm q$. Item $eA\ (= eE + EA) = a + \frac{\delta c}{\sigma}$, & $ea = x - \frac{\delta c}{\sigma} -$ ideoq; $DA\ (= eA \pm eD) = d + \frac{\delta c}{\sigma} \pm q$, & $Da = x - \frac{\delta c}{\sigma} \mp q$. Et rectangulum $DA \times Da = \frac{\sigma^2 dx - \sigma^2 q^2 \pm \sigma^2 xq \mp \sigma^2 dq \mp 2\sigma\delta cq + \sigma\delta xc - \sigma\delta dc - \delta^2 c^2}{\sigma^2}$ (vel, quia $x - d = 2c$) $= \frac{\sigma^2 dx - \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma^2 cq \mp 2\sigma\delta cq + 2\sigma\delta c^2 - \delta^2 c^2}{\sigma^2}$ (vel, quia $\sigma - \delta = \gamma$, & $2\sigma - \delta = \xi$,) $= \frac{\sigma^2 dx - \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\xi c^2}{\sigma^2}$

Deinde, (quia, propter Ellipſin, Quadrata ordinatim-applicatarum ſunt rectangulis ſegmentorum diametri-tranſverſæ proportionalia) $EA \times Ea = dx.\ DA \times Da :: E\alpha q = \iota^2.\ DOq. = \frac{\sigma^2 dx - \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\xi c^2}{\sigma^2 dx} e^2$.

Item (propter ſimilia triangula) $EF.\ E\alpha :: DG.\ DO.$ hoc eſt $\frac{dx}{c}.\ e :: \frac{\gamma dx \pm \sigma cq}{\sigma c}.\ \frac{\gamma dx \pm \sigma cq}{\sigma dx} e = DO$. ejuſque quadratum $\frac{\gamma^2 u^2 x^2 + \sigma^2 c^2 q^2 \mp 2\sigma\gamma dxcq}{\sigma^2 u^2 x^2} \iota^2. = DOq = \frac{\sigma^2 dx - \sigma^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma cq + \delta\xi c^2}{\sigma^2 dx} e^2$.

Ideoq; (utrinq; multiplicando per $\sigma^2 d^2 x^2$ & dividendo per c^2) $\gamma^2 d^2 x^2 + \sigma^2 c^2 q^2 \pm 2\sigma\gamma dxcq = \sigma^2 d^2 x^2 - \sigma^2 dxq^2 \pm 2\sigma\gamma dxcq + \delta\xi dxc^2$. Et (delendo utrinq; $\pm\ \sigma\gamma dxcq$, & transponendo) $\sigma^2 c^2 q^2 + \sigma^2 dxq^2 = \sigma^2 d^2 x^2 - \gamma^2 d^2 x^2 + \delta\xi dxc^2$. Et (quia $\sigma^2 - \gamma^2 = \delta\xi$, per 5 e 2) $\sigma^2 c^2 q^2 + \sigma^2 dxq^2 = \delta\xi d^2 x^2 + \delta\xi dxc^2$. Et (dividendo utrinq; per $dx + c^2 = \frac{1}{4}t2$) $\sigma^2 q^2, = \delta\xi dx$. hoc eſt $\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2} = q^2$. Conſtat ergo propoſitum.

Illud Synthetice ſic demonſtratur, (repetitis Analyſeos veſtigiis.) Ab Ellipſeos centro C ducatur recta $C\alpha$, atq; Ellipſin in puncto α contingat recta αF, diametro cuilibet CA occurrens in F; ipſiq; parallela quælibet OO rectæ $C\alpha$ (intra Ellipſin) occurrens in ε, diametroq; CA in G; Diametro autem CA ordinatim-applicetur αE, eiq; parallela εe, diametro occurrens in e. Eademq; maneant ſymbola quæ prius $e, d, t, x, c, \delta, \varsigma, \xi, \gamma$.

Sumantur autem in diametro utrinq; a puncto e æquales rectæ $eD = \sqrt{\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}}$; atq; ordinatim-ponantur DO, DO, rectæ OO occurrentes in O O. Adeoq; biſecantur tam DD in e (per conſtructionem) quàm OO (propter parallelas) in ε.

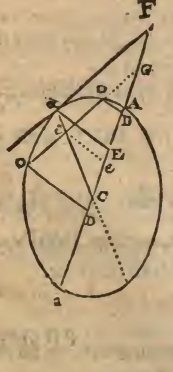
Dico rectam illam quamlibet OO (a rectâ $C\alpha$ biſectam in ε) Ellipſi inſcriptam eſſe; hoc eſt puncta O O eſſe in perimetro. Quod ſic probatur.

Quoniam ſunt (ut in Analyſi demonſtravimus) $EF = \frac{dx}{c}$, $eG = \frac{\gamma dx}{\sigma c}$, $eA = d + \frac{\delta c}{\sigma}$ & $ea = x - \frac{\delta c}{\sigma}$: Erit DG ($= eG \pm eD$) $= \frac{\gamma dx}{\sigma c} \pm \sqrt{\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}}$; & $DA = d + \frac{\delta c}{\sigma} \pm \sqrt{\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}}$, & $Da = x - \frac{\delta c}{\sigma} \mp \sqrt{\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}}$; atque horum rectangulum $DA \times Da = \frac{\sigma^2 dx + \delta\xi c^2 - \delta\xi\delta x \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2}$. (nempe, pro q & q^2 in analyſi, ſubſtituendo $\frac{\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2}$ & $\frac{\delta\xi dx}{\sigma^2}$.) vel (quia $\sigma^2 - \delta\xi =$

γ^2 per 5 c 2) erit DA × Da $= \frac{\overline{\gamma^2 dx \pm \delta\xi}^2 + 2\gamma\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2}$.

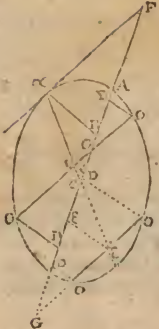
Tum (propter ſimilia triangula) erit EF. Eα :: DG. DO. hoc eſt, $\frac{dx}{c} . e :: \frac{\gamma dx \pm c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma c} . \frac{\gamma dx \pm c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma dx} e =$ DO. ejúſq; quadratum $\frac{\gamma^2 d^2x^2 + \delta\xi dx\, c^2 \pm 2\gamma dx c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2 d^2x^2} e^2 = \frac{\overline{\gamma^2 dx + \delta\xi}^2 + 2\gamma c\sqrt{\delta\xi \delta x}}{\sigma^2 dx} =$ DOq.

Sed & tantundem eſt quadratum Ordinatim-applicatæ puncto D. Nam (propter Ellipſin) ut rectangulum EA × Eα, ad rectangulum DA × Da; ſic (Eαq) quadratum Ordinatim-applicatæ in E, ad quadratum ordinatim-applicatæ in puncto D. hoc eſt $dx . \frac{\gamma^2 x + \delta\xi c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2} :: e^2 . \frac{\gamma^2 dx + \delta\xi c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\xi dx}}{\sigma^2 dx} e^2$. quod igitur eſt quadratum ordinatim-applicatæ puncto D, eſtq; (ut modò oſtenſum eſt) ipſum DOq.



Et propterea DO, DO, (quæ, ex conſtructione, ſunt punctis DD Ordinatim-poſitæ) & Ordinatim-applicatis æqualia, adeoq; puncta OO, ſunt in perimetro; rectaq; OO eſt Ellipſi inſcripta: ſed & illa (eiq; parallelæ, eâdem ratione,) a rectâ αC biſecatur, adeóq; ordinatim-inſcripta eſt, ejúſq; ſemiſſis sO diametro αC ordinatim-applicata. Quod erat demonſtrandum.

Notandum autem eſt (tam quoad Analyſin quam Syntheſin) fieri quandoque poſſe (ubi recta OO longius abeſt a tan-



gente αF) ut punctum G vel intra Ellipſin accidat vel etiam ultra oppoſitum verticem: Sed nihil hinc continget quod operationis progreſſum multum perturbet; tantùm mutanda forſan erunt aliquoties ſigna + —, aut aliquæ ſaltem quantitates occurrent negativè interpretandæ. Sed hoc non tanti eſt, ut ea propter operationem iſtis caſibus accommodandam repetam. Illud autem a quovis vel parum exercitato (ſicui id operæ prætium videbitur) facile præſtari poſſit.

Interim non erit incommodum Corollaria quædam hic ſubjungere,(qualia ſubjunximus Prop. 14. de Parabola,) puta.

Quodlibet Perimetri Ellipſeos punctum alicujus diametri verticem eſſe.

Adeoq; , *In quâlibet Ellipſi infinitos eſſe vertices, atq; Diametros infinitas.*

Item, *Ellipſeos diametros omnes in Centro convenire.*

Et, *Rectam quamlibet per centrum tranſeuntem, Diametrum eſſe.*

Item, *Quamlibet in eodem plano rectam per aliquod intra Ellipſin punctum tranſeuntem alicui diametro Ordinatim-poſitam eſſe.*

Item, *Quæ diametro alicui in vertice occurrit, ipſius Ordinatim-applicatis parallela, Ellipſin in illo puncto contingere.*

Et, *Quæ Ellipſin contingit, rectam diametro per contactus punctum tranſeunti Ordinatim-poſitam eſſe, ejuſq; Ordinatim-applicatis parallelam.*

Deniq; ; *Ellipſin, quæ diametros conjugatas æquales atq; ad angulos rectos poſitas habet, Circulum eſſe.*

Hæc autem, aliaq; innumera , vel ſatis in præcedentibus demonſtrantur, vel inde ſaltem facile demonſtrari poterunt.

PROP.

PROP. XXXII.

Effectiones Geometricæ.

ATq; ex dictis ſatis intelligere licet Geometricam Problematum effectionem. Puta,

Ellipſeos Diametrum invenire. Quæ enim duas quaslibet inſcriptas parallelas biſecat eſt diameter.

Ellipſeos Centrum invenire. Nempe in duarum quarumlibet diametrorum concurſu.

Ellipſeos diametrum invenire, quæ per datum punctum tranſeat. Rectam nempe, quæ datum punctum & centrum conjungit.

Datâ in Ellipſi diametro quâlibet, diametrum conjugatam invenire. Vel generaliter.

Datâ inſcripta quâlibet, diametrum invenire cui illa ordinatim-ponitur. Nempe rectam quæ datam inſcriptam aliámq; ipſi parallelam biſecat: Vel (ſi diameter non ſit) quæ ipſius punctum medium, & Ellipſeos centrum conjungit.

Datæ Ellipſeos Axes invenire. Nempe deſcribatur Peripheria Ellipſi concentrica, ipſamq; ſaltem in binis punctis ſecans: Rectam enim bina puncta proxima conjungentem quæ biſecat recta, eſt Axium alter; reliquuſq; eſt huic conjugatus.

Nota tamen; *In circulo omnes Diametros Axes eſſe, & quidem æquales; & conjugatas ipſius diametros omnes eſſe conjugatos Axes. In aliis autem Ellipſibus quibuſvis, non niſi duos Axes reperiri; eoſq; Conjugatos, ſed & inæquales; & quidem conjugatarum-diametrorum omnium maximè inæquales; quare &* Diametri-Extremæ *dici ſolent: Sicut è contra,* Diametros-Medias *dicere licet, quæ ſunt conjugatæ æquales.*

Datæ Ellipſeos ordinatim-applicatas (poſitione) invenire, quæ datæ ipſius diametro conveniunt. Inventa nempe Diametro conjugata, quæ huic æquidiſtant rectæ ſunt diametro datæ ordinatim-poſitæ.

Ellipſin ad datam diametrum & datum latus rectum deſcribere, quæ datum habeat inclinationis angulum. Nempe inventis (magnitudine) ad quotlibet diametri puncta Ordinatim-applicatis, (per prop 28.) applicentur ad ſua reſpectivè puncta in angulo imperato: Per earum enim extrema puncta, curva æquabiliter ducta, eſt Ellipſis.

Atqui ego brevitatis cauſâ (præſertim cum ex dictis facilè deduci queant) harum effectionum demonſtrationes, aliáq; tam Problemata quàm Theoremata plurima lubens omitto

PROP. XXXIII.

De Hyperbolâ abſolutè conſiderata.

Cum ſit in Hyperbolâ (ut oſtendimus Prop. 20. inſpecto Cono) Quadratum ordinatim-applicatæ $h^2 = ld + \frac{l}{t}d^2$. Licebit hic (ut Parabolam & Ellipſin ſupra) Hyperbolam eo charactere inſignitam, Cono eximere, atq; abſolutè & univerſaliter contemplari, acſi nullam ad Conum relationem habeat.

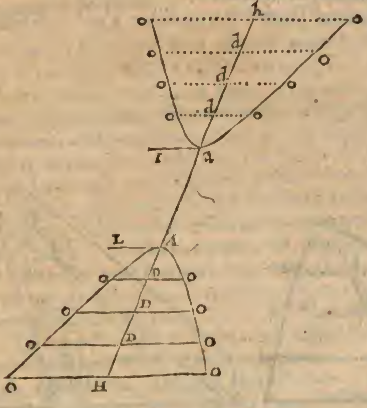
Hyperbolam igitur appello eam (ſive lineam curvam in plano deſcriptam, ſive figuram planam ejuſmodi curvâ terminatam) cujus ordinatim-applicatarum ſingularum quadrata æquantur aggregatis binorum rectangulorum; quorum quidem altera ſunt interceptis-diametris, altera earum quadratis proportionalia. (Nempe $h^2 = ld + \frac{l}{t}d^2$. Sunt enim rectangula ld ipſis d diametris-interceptis proportionalia, propter communem altitudinem l; rectangula vero $\frac{l}{t}d^2$ diametrorum-interceptarum quadratis d^2 ſunt proportionalia, propter eandē ubiq; rationem, puta $t. l :: d^2. \frac{l}{t}d^2$ Utrum verò rectangulorum majus ſit, non refert; ſed modo hoc, modò illud)

Diametrum, Diametros-interceptas, Verticem, Ordinatim-poſitas, Ordinatim-inſcriptas, Ordinatim-applicatas

catas, atq; *Punctum-applicationis*; eodem ſenſu hîc accipio quo iiſdem ſuprà de Parabola & Ellipſi uſus ſum.

Rectam nota *l* inſignitam,(lineam puta imaginariam, quæ cum interceptis diametris binorum rectangulorum illa continet quæ ſunt ipſis diametris-interceptis proportionalia) appello *Latus-Rectum*.

Rectam verò alteram, quæ notâ *t* deſignatur,(quam quidem ſupponimus Diametri ſupra verticem continuationem, verſus convexam curvæ partem ductam;



quæq; ita ſe habet ad Latus-rectum ut diametrorum-interceptarum quadrata ad binorum Rectangulorum illa quæ quadratis illis ſunt proportionalia:) *Diametrum-tranſverſam* appello,(ut quæ Oppoſitis Oppoſitarum Hyperbolarum vertices conjungit, ut poſt dicetur;) ejuſq; punctum medium (quod quidem extra

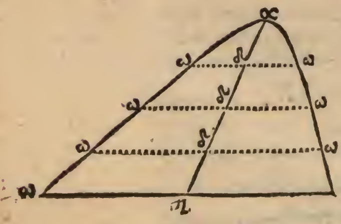
Hyperbolam jacet, ſed inter Hyperbolas Oppoſitas, ut deinceps patebit) appello *Centrum.*

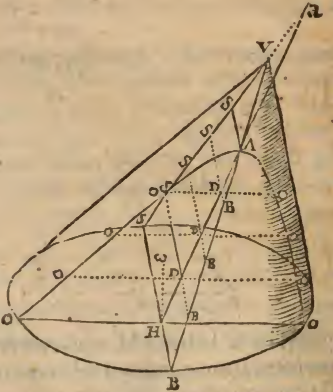
Hyperbolam a nobis definitam eandem eſſe cum illa quam definit Apollonius, ſimili fere progreſſu oſtendemus, atq; ſupra de Parabolâ & Ellipſi uſi ſumus prop. 21, & 26.

Hyperbolæ nempe, (qualem definit Apollonius Conic. lib. 1. prop 12.) Sectione coni factæ, univerſaliter convenire definitionem a nobis propoſitam; jam probatum eſt prop. 17, & 20.

Contra vero, Hyperbolam a nobis deſcriptam ita Cono aptari poſſe, ut eas habeat conditiones quas poſtulat Hyperbola Apolloniana; ſic probatur.

Exponatur Hyperbola quælibet a nobis definita $a\omega$, cujus





Ordinatim-applicatarum quadrata ſint $b^2 = ld + \frac{l}{t}d^2$. Dico hanc Cono ita ut poſtulatur aptari poſſe.

Ducatur recta $aA = t$, & (in ejuſdem continuatione) $AH = d$: Atq; ad rectam AH ponantur (ad oppoſitas partes) duæ rectæ invicem parallelæ; $AS = l$, & $HB = d$. (ſaltem tantæ ſint longitudinis AS, HB, ut ſit $AS \times HB = ld$;) Sitq; angulus SAH = AHB quilibet acutus, (modo major ſit complemento anguli inclinationis in Hyperbola expoſita.) Juncta verò aS producatur ut cum recta BH producta coeat in S; & juncta BA producatur ut occurrat ipſi aS in V; ut compleatur triangulum VBS; quod eſto Triangulum per-axem in Cono conſtruendo.

Deinde rectis AH, BHS, duo plana ita erigantur, ut communis eorum ſectio HO, faciat ad rectam HB angulos rectos, ad rectam vero AH angulum AHO æqualem angulo inclinationis in Hyperbola propoſita.

Hoc enim omnino fieri poſſe conſtat: Si enim recta quælibet HO perpendiculariter inſiſtens plano Trianguli VBS (adeóq; angulos faciens utroſq; OHA, OHB, rectos) circumvolvatur circa rectam BHS ut axem (invariato angulo OHB) donec ad ſitum plani perveniat in Hω, faciatq; in plano trianguli angulum ωHA acutum, qui minor erit angulo inclinationis in Hyperbola, (eſt enim, ex conſtructione, angulus AHB iſtius inclinationis complemento major;) neceſſe eſt enim ut, in tranſitu, aliquando fecerit angulum inclinationis angulo æqualem; (factus enim eſt tranſitus ab angulo recto, adeóq; debito majori, vel ſaltem æquali, ad angulum debito minorem;) adeoq; tunc fuerit in ſitu debito ut ſit duorum planorum prout requiritur concurrentium communis ſectio.

In plano autem BOS ſic poſito ſcribi intelligatur circulus, diametrum habens BHS, qui ſit baſis coni; aliiq; huic paralleli diametros habentes BDS, conum complentes, (per prop. 5.) qui plano AHO ſectus exhibebit Hyperbolam (per prop. 7.) cujus Ordinatim-applicatæ omnes (quarum HO eſt una) ad diametrum AH angulum facient æqualem angulo inclinationis ordinatim-applicatarum in Hyperbolâ expoſita ad diametrum ſuam; ſed & eiſdem ſunt reſpectivè æquales (ut patebit ex demonſtratione prop. 17, & 20.) ideoq; ſingulæ ſingulis congruunt, adeóq; & Hyperbola expoſita Hyperbolæ ſectione coni factæ. Quod erat faciendum. Adeóq; Hyperbola a nobis

definita

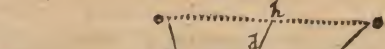
definita eadem eſt cum ea quam definit Apollonius. Quod erat demonſtrandum.

Sed & eádem opera docuimus *Conum conſtruere eiq; datam. Hyperbolam ita aptare, ut data ipſius diameter ſit diameter-ex-generatione:* Atq; etiam Theorematice verum eſſe, *Hyperbolæ diametrum quamlibet fieri poſſe, in aliquo ſaltem Cono, Diametrum-ex-generatione.*

PROP. XXXIV.

De Diametro tranſverſa, & Hyperbolis oppoſitis.

SI ad eandem diametrum duæ Hyperbolæ oppoſito ſitu ponantur, communem habentes diametrum-tranſverſam, idemq; latus rectum; ſintq; ad illam diametrum ordinatim-applicatæ unius, ordi-



natim-applicatis alterius parallelæ: dicentur illæ *Hyperbolæ-oppoſitæ*; earumq; vertices, eandem diametrumtrum-tranſverſam terminantes, *Vertices Oppoſiti*: Punctumq; inter oppoſitos vertices medium, eſt utriq; Hyperbolæ centrum commune.

Hæ autem Hyperbolæ-Oppoſitæ, reſpondent Hyperbolis Oppoſitorum conorum eodem plano ſectorum.

PROP. XXXV.

Corollaria.

P*Atet ex dictis*; Cùm ſit $h^2 = ld + \frac{l}{t} d^2$: Horum in Hyperbola quatuor, *Diametro-tranſverſâ*, *Diametro-interceptâ*, *Latere-recto*, & *Ordinatim-applicatâ*; Datis tribus quibuſvis, etiam reliquum (magnitudine) dari. Nempe (diſponendo & reſolvendo æquationes) erit

In Hyperbola,

Ordinatim-applicata, $h = \sqrt{:}\, ld + \frac{l}{t} d^2 : = \sqrt{\frac{td + a^2}{t}}\, l.$

Ejuſq; quadratum, $h^2 = ld + \frac{l}{t} d^2 = \frac{td + d^2}{t}\, l.$

Latus-Rectum, $l = \frac{h^2}{td + a^2}\, t.$

Diameter-tranſverſa, $t = \frac{td + d_2}{l^2}\, l.$

Diameter-intercepta, $d = \sqrt{:}\, \frac{1}{4} t^2 + \frac{t}{l} h^2 : - \frac{1}{2} t.$

Adeoq; ; Diametrorum tranſverſæ & interceptæ aggregatum, $t + d = \sqrt{:}\, \frac{1}{4} t^2 + \frac{t}{l} h^2 : + \frac{1}{2} t.$

Diſtantia puncti applicationis a centro. $c = \sqrt{:}\, \frac{1}{4} t^2 + \frac{t}{l} h^2.$

Patet etiam; Ut Diameter-tranſverſa, ad interceptam; ſic eſſe binorum Rectangulorum ea quæ diametris interceptis proportionalia, ad Rectangula earum quadratis proportionalia. Nempe $t.d :: ld. \frac{l}{t}d^2$.

Item; Ut Diameter-tranſverſa, ad Latus-rectum; ita quadrata diametrorum-interceptarum, ad Rectangula quadratis illis proportionalia. Nempe $t.l :: d^2. \frac{l}{t}d^2$.

Item, Ut Diameter tranſverſa, ad interceptam; ita utriuſq; aggregatum, ad quartam; quæ, ducta in Latus-rectum, Rectangulum efficit æquale quadrato ordinatim-applicatæ. Nempe $t.d :: t+d. \frac{t+d}{t}d = \frac{td+d^2}{t}$. Et $\frac{td+d^2}{t}l = h^2 = ld + \frac{l}{t}d^2$.

Adeoq; Ut Diameter-tranſverſa, ad Latus-rectum; ſic Rectangulum ſub Diametro-interceptâ & aggregato diametrorum tranſverſæ & interceptæ, ad quadratum Ordinatim-applicatæ. Nempe $t.l :: td+d^2. \frac{td+d^2}{t}l = h^2 = ld + \frac{l}{t}d^2$.

Vel, Ut Rectangulum Diametro interceptâ, & aggregato Diametrorum tranſverſæ & interceptæ comprehenſum, ad quadratum Ordinatim-applicatæ: ſic eſſe Diametrum-tranſverſam ad Latus-rectum. (Unde Hyperbolæ Latus-rectum commodè reperitur.) Nempe, $td+d^2. h^2 :: t.l = \frac{h^2}{td+d^2}t$.

Inde ſequitur; Quadrata Ordinatim-applicatarum, Rectangulis Diametro interceptâ & aggregato diametrorum tranſverſæ & interceptæ comprehenſis, eſſe proportionalia. Sunt enim ubiq; ut t ad l.

Adeoq; Prout longius a vertice removetur punctum-applicationis, ita ſemper augeri Ordinatim-applicatas. Nempe quia ſic tam d quam $t + d$ (diameter intercepta, & aggregatum tranſverſæ & interceptæ) augentur, adeoq; & eorum rectangula, & propterea quadrata Ordinatim-applicatarum his rectangulis proportionalia, adeóq; & ipſæ Ordinatim-applicatę.

Et propterea; Hyperbolam ex earum linearum numero eſſe, quæ figuram non claudunt; Cum Ordinatim-applicatę (a vertice inchoando) perpetuo creſcant, adeoq; & creſcat crurum divaricatio, quę idcirco nunquam ſunt deinceps coitura.

Ideoq; & Hyperbolę diametrum quamlibet non niſi in unico Verticis puncto eidem Hyperbolę occurrere; Quoniam nempe creſcentibus continuò Ordinatim-applicatis Hyperbolę curva a diametro magis continuò reſiliat, nunquam ideo deinceps coitura. Vertices enim Oppoſiti, quanquam in eâdem diametro, non tamen ſunt in eâdem Hyperbolâ, ſed in Oppoſitis.

PROP. XXXVI.

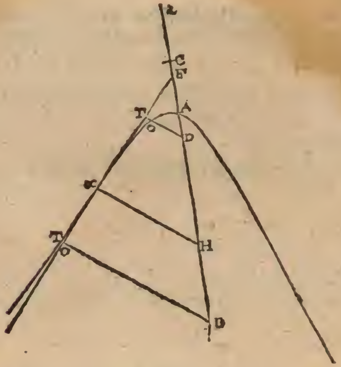
De recta Hyperbolam contingente.

Recta Hyperbolam contingens diametro productæ inter verticem & centrum occurret. Punctum vero concurſus ſic inquiremus.

Supponatur tangens aF occurrens, in F, diametro HA productæ, eiq; ordinatim-applicata aH. Supponatur etiam ubivis eidem diametro Ordinatim-applicata DO, tangenti Occurrens in T. Sitq; A vertex, C centrum.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) $Fa = b$, $HA = d$, $Aa = t$, (ideoq; $Ha = t + d$, $HC = \frac{1}{2} t + d$,) $HF = f$, $HD = a$, (ideoq; $DF = f \pm a$, $DA = d \pm a$, $Da = t + d \pm a$.)

Tum (quia, propter Hyperbolam, quadrata Ordinatim-applicatarum ſunt rectangulis AHa proportionalia, ut modo oſtenſum eſt) erit HA×Ha. DA×Da : : Haq. DOq. hoc eſt, $td+d^2 . \; td+d^2+a^2 \pm ta \pm 2da :: h^2 . \; \frac{td+d^2+a^2 \pm ta \pm 2da}{td+d^2} h^2$



Et (propter ſimilia triangula) HF. Hα : : DF. DT. hoc eſt $f . h :: f \pm a . \frac{f \pm a}{f} h = DT$. ejuſq; quadratum $\frac{f^2+a^2 \pm 2fa}{f^2} h^2 = DTq$.

Tum (propter tangentem) DTq $\geqq$ DOq (nempe æqualia ſi D H coincidant; vel, ſi ſecus, illud majus;) hoc eſt, $\frac{f^2+a^2 \pm 2fa}{f^2} h^2 \geqq \frac{td+d^2+a^2 \pm ta \pm 2da}{td+d^2} h^2$. & (utrinq; multiplicando per $\frac{td+d^2}{h^2} f^2$) erit $f^2td + f^2d^2 + tda^2 + d^2a^2 \pm 2ftda \pm 2fd^2a \geqq f^2td + f^2d^2 + f^2a^2 \pm f^2ta \pm 2f^2da$. Et (deletis utrinq; $f^2td + f^2d^2$) erit $tda^2 + d^2a^2 \pm 2ftda \pm 2fd^2a \geqq f^2a^2 + f^2ta \pm 2f^2da$. Et (dividendo per $\pm a$) erit $\pm tda \pm d^2a + 2ftd + 2fd^2 \geqq \pm f^2a + f^2t + 2f^2d$.

Deniq;, ponendo D H idem eſſe punctum (ut evaneſcat quantitas a, adeoq; & ipſius multiplicia tda, u^2a, f^2a) erit $2ftu+2fu^2=f^2t+2f^2d$. Et (dividendo per $2f$) $td+u^2=\frac{1}{2}ft+fd$: (hoc eſt □AHa = □CHF;) vel $\frac{1}{2}t+d.\ t+d :: d.f=\frac{t+d}{\frac{1}{2}t+d}d$. Hoc eſt HC. Ha :: HA. AF. Quod erat inquirendum.

Quod Theorema ſic inventum, hoc eſt; Si ſit ordinatim-applicata in Hyperbola Hα, atq; ab applicationis puncto H continuetur diameter HA ad F; ſitq; ut diſtantia puncti-applicationis a Centro HC, ad aggregatum diametrorum tranſverſę & interceptę Ha; ſic diameter intercepta HA, ad eandem continuatam HF. recta αF juncta Hyperbolam in puncto α continget.

Vel ſic; ſi recta αF Hyperbolam contingat in termino ordinatim-applicatæ α; erit, ut diſtantia puncti applicationis H a centro HC, ad ejuſdem diſtantiam a vertice remotiore Ha; ſic diſtantia a vertice propiori HA, ad diſtantiam a puncto concurſus tangentis & diametri HF.

Demonſtratio, ſi ſit opus, inſtitui poterit repetitis Analyſeos veſtigiis.

Sed & patet, quod, cùm ſit HC. Ha :: HA. HF. hoc eſt HC. HC+Ca :: HA. HA+AF. erit (dividendo) HC. Ca = CA :: HA. AF. Adeoq; ſi ſumatur (in diametro continuata) AF = $\frac{HA \times AC}{HC}$, habetur punctum F. Sed etiam, cùm ſit HC major quam CA, (pars toto) erit propterea HA major quam AF; hoc eſt. *Diameter intercepta, major quam ipſius continuatio ad concurſum Tangentis*; (contra quam in Ellipſi ubi minor eſt; et in Parabolâ, ubi æqualis; ut oſtendimus prop 23 & 30.)

Item, (ponendo CA $=\frac{1}{2}t=s$, & CH = CA + AH $=s+d=c$, ideoq; HA $=c-s$, & Ha $=c+s$) erit HF $=\frac{td+d^2}{\frac{1}{2}t+d}=\frac{c^2-s^2}{c}=f$, & CF $=c-f=\frac{s^2}{c}$. Hoc eſt CH. CA :: CA. CF.

Atq; hinc docemur, *Rectam α F ducere quæ Hyperbolam in dato puncto α contingat.* Sumpta nempe $CF = \frac{CAq}{CH}$, & quidem a C verſus A, ſi contactus requiratur ad Hyperbolam A α, vel (eâdem ratione) a C verſus a, ſi ad Hyperbolam oppoſitam.

Atq; hinc ſequitur; *Rectam contingentem Hyperbolæ diametro citra centrum occurrere; puta intra centrum & verticem:* (nam quod ultra verticem ſit, patet ex prædictis, cum ſit HC. Ha : : HA. HF. eſt enim HC minor quam Ha, ideoq; & HA minor quam HF: Quòd autem ſit citra centrum, patet etiam, quia, ut dictum eſt, HC. CA : : HA. AF, adeoq; HC. HA : : AC. AF. at HC major eſt quam HA, ergo AC major quam AF.)

Item, *A quovis diametri puncto F, inter Hyperbolæ verticem & centrum ſumpto, duci poſſe rectam Fα, quæ Hyperbolam contingat.* Quo autem punctum F puncto C propius ſit, eo remotius abeſt & punctum contactus α, & punctum applicationis huic conveniens H. Quia ut CF. CA : : CA. CH.

Adeoq; ſi ſupponamus punctum F ipſi C coincidere, ut diſtantia CF = 0 nulla ſit; erit propterea CH infinita ; *Hoc* eſt, punctum H, (adeoq; & punctum α) ſupponendum eſt infinitè diſtare, adeoq; vel nuſquam vel non niſi in Hypberola actu infinitâ reperiri.

Cumq; punctum C indifferenter ſe habeat ad utramq; Hyperbolarum oppoſitarum; ea quæ ſupponitur Contingens per centrum ducenda, verſus utramvis partem producatur, infinita erit, adeóq; Hyperbolarum illarum neutri occurret. quæ propterea *Aſymptota* dici ſolet, ut poſt dicetur.

Alia quæ adjungi poſſent corollaria lubens omitto.

PROP. XXXVII.

De Hyperbolæ Diametris.

SI per Hyperbolę Centrum C, punctúmq; in curvâ quodlibet α, tranſeat Cα recta; erit illa ejuſdem Hyperbolę diameter, verticem habens α, atq; ordinatim-applicatas rectæ αF hyperbolam in α contingenti parallelas.

Libet propoſitionem (ut prius 24 & 31.) Analytice examinare, deinde & Syntheticè demonſtrare.

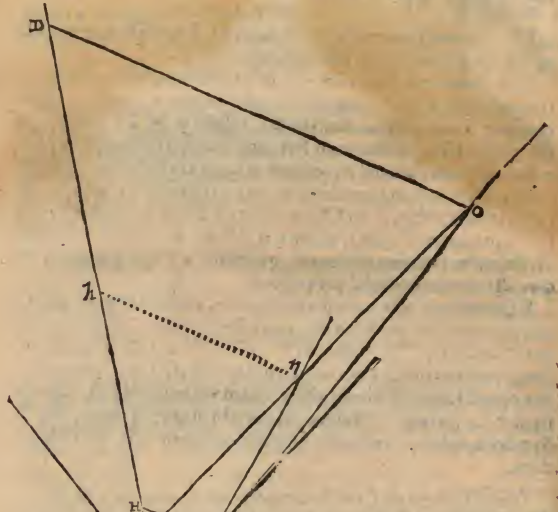
Supponamus igitur rem eſſe ut perhibetur, adeoq; inſcriptam quamlibet OO tangenti αF parallelam a rectâ Cα (per centrum & contactum tranſeunte) biſectam in ν. Sintq; rectæ OD, OD, αH, diametro HA ordinatim-applicatæ, & propterea invicem parallelæ; quibus etiam parallela ducatur νh eidem diametro in h occurrens; quæ propterea (propter parallelas) biſecabit, (ut OO in ν, ſic) DD in h. Deniq; recta OO (producta ſi opus) diametro HA occurrat in G: Occurſuram enim omnino eſſe patet, quoniam αF ipſi parallela eidem diametro occurrit, per præced.

Supponemus etiam impræſentiarum, occurſus punctum G contingere ſupra verticem A, extra Hyperbolam. Si autem ſecus contingat, (uti fieri poteſt, ſi inſcripta OO remotius a tangente ſumatur, ita ut diametrum tranſeat,) non tamen ſeries operationis variabitur aliter quam vel mutanda aliquando ſigna + −, vel quantitatem aliquando negativè interpretandam fore, adeoq; ex parte ſuppoſitioni contrariâ, intelligendam.

Dicantur autem (ob commodiorem calculum) H$\alpha = b$, HA$=d$, Aa$=\iota$, Ha $(=\iota+d)=z$, HC $(=\frac{1}{2}\iota+d)=c$, hD $=q$, $\alpha\nu=\delta$, αC$=\sigma$, νC $(=\sigma+\delta)=\gamma$, $2\sigma+\delta=\zeta$.

Tum (per præced.) HC. Ha :: HA. HF. hoc eſt $c.z::d.\frac{dz}{c}=$HF. Et (propter parallelas & ſimilia triangula) Cα. $\alpha\nu$ :: CH. Hh. hoc eſt $\sigma.\delta::c.\frac{\delta c}{\sigma}=$Hh. Et C$\alpha$. C$\nu$ :: Hα. hν :: HF. hG. hoc eſt $\sigma.\gamma::b.\frac{\gamma b}{\sigma}=h\nu$ $::\frac{dz}{c}.\frac{\gamma dz}{\sigma c}=$hG. ideoq; DG $(=$hG$\pm$hD$)=\frac{\gamma dz}{\sigma c}\pm q$. Item hA $(=$AH$+$Hh$)=d+\frac{\delta c}{\sigma}$, & ha $(=\iota+d+\frac{\delta c}{\sigma})=z+\frac{\delta c}{\sigma}$. ideóq; DA $=d+\frac{\delta c}{\sigma}\pm q$, &

$Da = x \dagger \frac{\delta c}{e} \pm q$. Et rectangulum $DA \cdot Da =$



x^{2} 2dx

$\frac{\sigma^2 dz+\sigma^2 q^2\pm\sigma^2 zq\pm\sigma^2 dq\pm 2\sigma\delta cq+\sigma\delta z\iota+\sigma\delta d\iota+d^2\iota^2}{\sigma^2}$ (vel quia $z+d=2c$) $=\frac{\sigma^2 dz+\sigma^2 q^2\pm 2\sigma^2 cq\pm 2\sigma\delta cq+2\sigma\delta\iota^2+\delta^2\iota^2}{\sigma^2}$ (vel quia $\sigma+\delta=\gamma$, & $2\sigma+\delta=\xi$) $=\frac{\sigma^2 dz+\sigma^2 q^2+2\sigma\gamma cq+\delta\zeta\iota^2}{\sigma^2}=$ DA×Da.

Deinde (quia propter Hyperbolam, Quadrata Ordinatim-applicatarum ſunt rectangulis diametro intercepta & aggregato diametrorum tranſverſæ & interceptæ comprehenſis proportionalia) erit HA×Ha $=dz$. DA×Da : : Hαq $=b^2$. DOq $=\frac{\sigma^2\iota z+\sigma^2 q^2\pm 2\sigma\gamma cq+\delta\zeta\iota^2}{\sigma 2dz}b^2$.

Item (propter ſimilia Triangula) HF. Hα : : DG.DO. hoc eſt $\frac{dz}{c}$. b : : $\frac{\gamma dz\pm\sigma cq}{\sigma c}$. $\frac{\gamma dz\pm\sigma cq}{\sigma dz}b=$ DO. ejuſque quadratum. $\frac{\gamma^2 d^2 z^2+\sigma^2\iota^2 q^2\pm 2\sigma\gamma dzcq}{\sigma^2 d^2 z^2}b^2=$ D O q $=\frac{\sigma^2 dz+\sigma^2 q^2\pm 2\sigma\gamma cq+\delta\zeta\iota^2}{\sigma^2 dz}b^2$.

Ideóq; (utrinq; multiplicando per $\sigma^2 d^2 z^2$ & dividendo per b^2) $\gamma^2 d^2 z^2+\sigma^2\iota^2 q^2\pm 2\sigma\gamma dzcq=\sigma^2 d^2 z^2+\sigma^2 dzq^2\pm 2\sigma\gamma dzcq+\delta\zeta dz\iota^2$. Et (delendo utrinq; $\pm 2\sigma\gamma dzcq$, atq; tranſponendo) $\sigma^2\iota^2 q^2-\sigma^2 dzq^2=\delta\zeta dz\iota^2-\gamma^2 d^2 z^2+\sigma^2 d^2 z^2$. Et (quia $\gamma^2-\sigma^2=\delta\zeta$, per 6 e 2,) $\sigma^2\iota^2 q^2-\sigma^2 dzq^2=\delta\zeta dz\iota^2-\delta\zeta d^2 z^2$. Et (dividendo utrinq; per $\iota^2-dz=\frac{1}{4}t^2$) erit $\sigma^2 q^2=\delta\zeta dz$. hoc eſt $\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}=q^2$. Conſtat ergo propoſitum.

Illud Synthetice ſic demonſtratur. (repetitis Analyſeos veſtigiis) A centro C ducatur ad Hyperbolam Cα. Atq; in puncto α Hyperbolam contingat αF, diametro cuilibet HA occurrens in F; ipſiq; parallela quælibet OO, eidem diametro HA occurrens in G, & rectæ Cα (productæ) in n. Diametro autem HA ordinatim-applicetur αH, eiq; parallela nh eidem diametro occurrat in h. Eademq; quæ prius maneant ſymbola $b, d, t, z, c, \delta, \sigma, \gamma, \zeta$.

Sumantur

Sumantur autem in diametro utrinq; a puncto h æquales rectæ $hD = \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$. atq; ordinatim-ponantur DO, DO, rectæ OO occurrentes in O O. Adeoq; biſecantur tam DD in h (per conſtructionem) quam O O (propter parallelas) in $\varkappa$.

Dico rectam OO (a recta $C\alpha\varkappa$ biſectam in $\varkappa$) Hyperbolæ inſcriptam eſſe; hoc eſt, puncta O O eſſe in ipſa Hyperbolæ curva. Quod ſic probatur.

Quoniam ſunt (ut in Analyſi demonſtravimus) $HF = \frac{dz}{c}$ $hG = \frac{\gamma dz}{\sigma c}$, $hA = d + \frac{dc}{\sigma}$, & $ha = z + \frac{dc}{\sigma}$. Erit DG ($= hG \pm hD$) $= \frac{\gamma dz}{\sigma c} \pm \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$; item DA ($= hA \pm hD$) $= d + \frac{dc}{\sigma} \pm \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$, $Da = z + \frac{dc}{\sigma} \pm \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$, & rectangulum $DA \times Da = \frac{\sigma^2 dz + \delta\zeta c^2 + \delta\zeta dz \pm 2\gamma\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2}$ (nempe pro q^2 & q in analyſi, ſubſtituendo in ſyntheſi $\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}$ & $\sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}}$.) vel (quia $\sigma^2 + \delta\zeta = \gamma^2$ per 6 e 2) $\frac{\gamma^2 dz + \delta\zeta c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2} = DA \times DA$.

Tum (propter ſimilia triangula) erit $HF \cdot H\alpha :: DG. DO$. hoc eſt, $\frac{dz}{c} \cdot h :: \frac{\gamma dz}{\sigma^2} \pm \sqrt{\frac{\delta\zeta dz}{\sigma^2}} \cdot \frac{\gamma dz \pm c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma dz} h = DO$. ejuſq; quadratum $\frac{\gamma^2 d^2 z^2 + \delta\zeta dz c^2 \pm 2\gamma dz c\sqrt{d\delta\zeta dz}}{\sigma^2 d^2 z^2} h^2$ $= DOq = \frac{\gamma^2 dz + \delta\zeta c^2 \pm 2\gamma c\sqrt{\delta\zeta dz}}{\sigma^2 dz} h^2$.

Sed & tantundem eſt quadratum ordinatim-applicatæ puncto D. Nam (propter Hyperbolam) ut rectangulum $HA \times Ha$, ad rectangulum $DA \times Da$; ſic $H\alpha q$ quadratum ordinatim-applicatæ puncto H, ad quartum, quod erit quadratum ordinatim-applicatæ puncto D. hoc eſt, $dz.\frac{\gamma^2 dz + \delta\zeta^2 + 2\gamma\sqrt{\delta\zeta}iz}{\sigma^2}$ $::h^2.\frac{\gamma^2 z + \delta\zeta^2 + 2\gamma\sqrt{\delta\zeta}iz}{\sigma^2 uz}h^2$. quod æquale eſt ipſi DOq, ut modo oſtendimus.

Et propterea DO, DO, (quæ, ex conſtructione, ſicut punctis D D ordinatim poſitæ,) ſunt & ordinatim-applicatis æquales, adeóq puncta O O ſunt in Hyperbolæ curvâ, rectaq; OO eſt Hyperbola inſcripta. Sed & illa (eiq; parallelæ, eâdem ratione,) a recta C*αn* biſecatur; adeóq; ordinatim-inſcripta eſt, ejúſq ſemiſſis *n*O diametro C*αn* Ordinatim-applicata. Quod erat demonſtrandum.

Notandum autem eſt (quod & prius monui) fieri quidem poſſe ut inſcripta OO diametrum tranſeat in G intra parabolam. Quod tamen operationis progreſſum non aliter immutabit quam variando nonnunquam ſigna + — aut quantitatem negativè interpretandam exhibendo. Ut experienti patebit.

Recta autem illa α C quam Hyperbolæ Diametrum eſſe oſtendimus, iiſdem oppoſitis-Hyperbolis convenit quibus & A C; ipſaq; αC duplicata erit earundem Diameter-tranſverſa. Sumatur enim in oppoſita Hyperbola ad=AH, hoc eſt Cd=CH, & ordinatim-applicetur (ſitu contrario) d o, quæ erit ipſi Hα æqualis & parallela (propter æquales diametros interceptas, eandam tranſverſam, idem latus-rectum, atq; ſitum parallelum, per prop. 34.) adeóq; anguli alterni æquales, nempe Cdo=CDα: & propterea (juncta oC) triangula CDα. Cdo, ſimilia & æqualia; ideóq; (propter angulos κατὰ κορυφὴν ad C æquales) erit αCo una recta; atq; illa quidem in C biſecta; quæ igitur cùm ad Oppoſitas Hyperbolas terminetur, erit illarum tranſverſa-diameter, ejúſq; medium punctum C earundem centrum.

Unde etiam liquet, *Hyperbolæ Diametros omnes in eodem communi centro convenire.*

Sed & ea omnia Corollaria (ultimo excepto) quæ ad prop. 31. de Ellipſi memorantur; iiſdem fere verbis etiam Hyperbolæ conveniunt. Ut non ſit opus ea repetere.

PROP. XXXVIII.

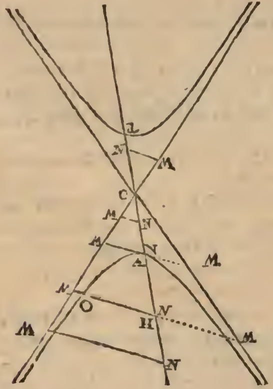
Effectiones Geometricæ.

PRoblematum effectiones quæ de Ellipſi memorantur prop. 31. eædem ferè totidem verbis etiam Hyperbolæ conveniunt. Nec opus eſt ut repetantur.

PROP. XXXIX.

De Hyperbolæ Aſymptotis.

SI ſumatur in Hyperbolæ diametro (extra centrum **C**) punctum quodvis N, eíq; ordinatim-ponatur N M; fiátq; *t. l* : : CNq. NMq. (hoc eſt, ut diameter tranſverſa, ad latus rectum; ſic quadratũ diſtantiæ punctorum C N, ad quadratum rectæ N M,) juncta CM erit illius Hyperbolæ *Aſymptota*: Nempe quæ (cõtinuata) Hyperbolæ (quantumvis productæ) nunquam occurret, ita tamen continuo propius accedet ut diſtantia tandem evadat quâvis aſſignatâ minor.



Nam 1°. Sumpto (intra Hyperbolam A O) diametri puncto quovis

H, cui ordinatim-applicetur HO, recte ae CM occurrens in M. Erit (propter ſimilia triangula) CN.NM : : CH.HM Adeoquè CNq.NMq : : ($t.l$: :) CHq $= c^2$. HMq $= \frac{l}{t} c^2 = \frac{c^2}{t} l$. Sed (propter Hyperbolam) erit HOq $= \frac{c^2 - s^2}{t} l$ (ponendo nempe $s = \frac{1}{2} t$, ideoq; $d = c - s$, & $d + t = c + s$.) Ergo HOq minus eſt quam HMq, & recta HO minor quam recta HM & propterea *M* erit extra Hyperbolam. Recta igitur CMM (quantumvis producta) Hyperbolæ nunquam occurrit. Quod erat primo demonſtrandum.

2°. Cùm ſit OM ($=$ HM - HO) $= \sqrt{\frac{c^2}{t} l} - \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t} l}$; ſintq; s, l, t, quantitates ſtabiles, at c variabilis, & quidem tanto major quanto remotius abeſt punctum H a centro C: Differentia rectarum $\sqrt{\frac{c^2}{t} l}$, $\sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t} l}$, hoc eſt, rectarum HM, HO, perpetuo minuetur prout c, hoc eſt, CH, augetur. Nam in majoribus quadratis æquale augmentum (retenta figuræ ſpecie) minorem poſtulat lateris productionem quam in quadratis minoribus, (ut notum eſt.) Ideoq; prout longius abeſt a centro punctum H, adeoq; c^2 majus eſt, (reliquis interim immutatis) ita ſemper minuetur OM, differentia laterum $\sqrt{\frac{c^2}{t} l}$, $\sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t} l}$. Et conſequenter diſtantia rectæ CMM ab Hyperbolæ curva AO, continue decreſcit. Quod erat ſecundò demonſtrandum.

3°. Sit aſſignata diſtantia quælibet quantumvis exigua, puta $2a$; Dico Hyperbolam AO rectamq; CM eò produci poſſe, ut earum diſtantia minor evadat quam eſt aſſignata $2a$. Sumatur enim linea recta aliquanto minor, puta a, cui æqualem eſſe volumus rectam OM; & quærendum ſit punctum H (cui ordinatim-ponenda ſit HOM) ſeu longitudo rectæ CH. Quoniam igitur ſupponimus $a =$ OM $= \sqrt{\frac{c^2}{t} l} - \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t} l}$; erit (tranſponendo) $\sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t} l} = \sqrt{\frac{c^2}{t} l} - a$; & (utrinquè quadrando) $\frac{c^2 - s^2}{t} l = \frac{c^2}{t} l + a^2 - 2a\sqrt{\frac{c^2}{t} l}$. Et (tranſponendo, atq; reducendo) $2ac\sqrt{\frac{l}{t}} = a^2 + \frac{s^2}{t} l$. Et (quadrando) $\frac{4a^2c^2l}{t} = \frac{a^4t^2 + s^4l^2 + 2a^2s^2lt}{t^2}$. Adeoquè (dividendo per $\frac{4a^2l}{t}$) erit $c^2 = \frac{a^4t^2 + s^4l^2 + 2a^2s^2lt}{4a^2lt}$. Habetur ergo quantitas c^2, (cujus radix $c = CH$,) adeoq; punctum H, cui ſi Ordinatim-ponatur COM, erit $OM = a$, (quod, ſi opus ſit ſynthetice demonſtrari poſſit, repetitis Analyſeos veſtigiis,) adeóq; minor quam diſtantia aſſignata $2a$. Ideoq; diſtantia continuatæ rectæ CMM, ab Hyperbolâ continuatâ AO, tandem minor evadet diſtantia quâvis aſſignata. Quod erat tertio demonſtrandum. Adeoq; conſtat propoſitum.

Poſſet & hic oſtendi, *Ad eandem Hyperbolam, nonniſi duas Aſymptotas (utrinq; unam) duci poſſe; ſe mutuo in centro ſecantes.* Alia enim quæcunq; in eodem plano recta, vel Hyperbolam ſecabit, vel ad requiſitam appropinquationem non accedet. Ut facile eſt demonſtratu.

Item, *Aſymptotas unius Hyperbolæ eſſe etiam Hyperbolæ oppoſitæ Aſymptotas.* Quod ſimili fere progreſſu demonſtrabitur ei quo uſus ſum ad Corollarium prop. 37.

Neq; illis tantum binis Hyperbolis Oppoſitis, ſed & binis aliis hiſce conjugatis (de quibus poſt dicetur) eædem conveniunt Aſymptotæ, & quidem ſolæ.

Patet item, quod (*ſi ab eodem puncto H, ordinatim-applicatæ HO, HO, utrinq; continuentur ut Aſymptotis occurrant in M,*) *erunt, OM, OM, (utrinq; ſumptæ) æquales.* Cum enim tam HM, HM, $\left(\sqrt{\frac{c^2}{t} l}\right)$ quam HO, HO, $\left(\sqrt{\frac{c^2}{t} l} - \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t} l}\right)$ erunt & OM, OM, $(HM - HO)$ æquales.

Item; *Si (ad eandem quamvis Diametrum) Ordinatim ponantur rectæ quotlibet MOHM, (Aſymptotis occurrentes in M Hyperbolæ in O, diametro in H,) omnia rectangula MOM (ſegmentis comprehenſa) vel etiam rectangula OMO (ſumptis O, O, in utroq; crure Hyperbolæ) erunt* *tam inter ſe, quam quadratæ rectæ AM (ab Aſymptotâ ad verticem ordinatim-poſitæ) æqualia.* Nam ubicunq; in diametro (intra Hyperbolam) ſumatur punctum applicationis H; rectangulum MOM, vel OMO, (hoc eſt, HM − HO, in HM + HO; hoc eſt $\sqrt{\frac{c^2}{t}l} - \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$, in $\sqrt{\frac{c^2}{t}l} + \sqrt{\frac{c^2 - s^2}{t}l}$;) ſemper erit $\frac{s^2}{t}l$ (ut multiplicando patebit;) hoc eſt AMq; eſt enim (ex hypotheſi) $t . l :: CNq . NMq :: CAq\ (= s^2) . AMq = \frac{s^2}{t}l$.

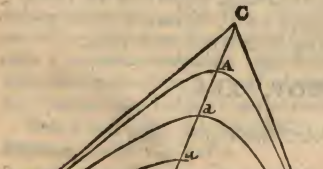
Aſymptota verò, quæ jam dicitur, eadem eſt quæ ad prop. 36. ſupponitur *Tangens infinita*, a Centro ducenda, quæ non niſi poſt infinitam diſtantiam (hoc eſt, nunquam,) Hyperbolam continget.

Alia de Aſymptotis & Theoremata & Problemata quæ ex jam dictis deduci poſſent prætereo.

PROP. XL.

De Hyperbolis Aſymptotis.

Hyperbolæ quotlibet ad eandem diametrum (verſus eaſdem partes) ita accommodatæ, ut centrum idem habeant, atq; eaſdem (ad communem diametrum) Ordinatim-poſitas, vertices autem (in eâdem diametro) varios quoſlibet, puta A, a, α, (adeoq; & varias diametros-interceptas;) Si eadē ſit in omnibus ratio diametri-trāſverſæ ad ſuum reſpective latus-rectum



ctum, (puta ratio t ad l in omnibus eadem) eaſdem habebunt Aſymptotas-rectas, (puta CM, per præced.) Erúntq; ipſę ad invicem *Hyperbolæ Aſymptotæ*: Nempe ita ad invicem appropinquabunt ut earum diſtantia tandem evadat quâlibet aſſignatâ minor, (quoniam earum quælibet ita prope ad rectas Aſymptotas accedit;) nec tamen invicem occurrent, (quoniam Ordinatim-applicatarum quadrata $h^2 = \frac{r^2 - s^2}{t} l$ minora erunt, cæteris paribus, ubi s major eſt; adeoq; HO major quam Ho, atq; hæc major quàm Hω.)

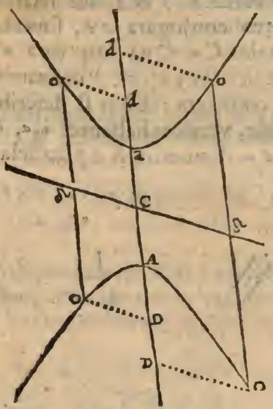
Si verò non ſit (in variis ejuſmodi Hyperbolis) ratio $\frac{l}{t}$ eadem: Nec eaſdem habebunt aſymptotas rectas; neq; erunt ipſę Aſymptotę; ſed vel ſe mutuò ſecabunt, (nempe ſi Hyperbola quę majorem habet diametrum-tranſverſam minorem habeat rationem t ad l;) vel (ſi majorem habeat rationem t ad l) debitam appropinquationem non attingent. Prout ex premiſſis non eſt difficile demonſtratu.

Illis autem, quas diximus, *Hyperbolis Aſymptotis*, reſpondent Hyperbolæ totidem ejuſdem Coni planis parallelis ſecti; Quæ quidem quò propius ad verticem Coni accedunt, eò ad Triangulum accedunt propiùs; donec tandem (in ipſo coni vertice,) evaneſcente diametro tranſverſa, Hyperbola in Triangulum (vel ſi placet, Trianguli crura) degeneret; cujus quidem Trianguli crura repræſentant binæ Aſymptotæ rectæ.

PROP. XLI.

De Hyperbolæ Diametris Conjugatis.

SI oppoſitarum Hyperbolarum diametro-tranſverſę Aa Ordinatim-ponatur recta per centrum δ C δ, dicetur illa *Diameter-conjugata:* quæ quę quidem rectas omnes diametro A a parallelas, oppoſitis ſectionibus terminatas, puta Oo, bifariam ſecabit; quę propterea diametro δ δ ordinatim-poſitę ſunt, quas *Ordinatim-tranſcriptas* dicere licet.



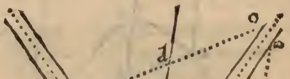
Nam ſi ordinatim-applicentur O D, od, diametro Aa (verſus eaſdem partes;) erunt illæ (parallelæ parallelis terminatæ, ideóq;) æquales; & propterea CD, Cd, etiam æquales erunt (propter communem oppoſitarum Hyperbolarum diametrum-tranſverſam, & æqualia latera-recta;) ideóq; & δO, δo, (propter parallelas) æquales erunt.

Sunt autem rectæ δO, hoc eſt CD, ea quantitas quam ſupra diximus $c = s + d = \frac{1}{2}t + d$.

PROP. XLII.

De Conjugatis Hyperbolis.

SI ſit Hyperbolarum-Oppoſitarum tranſverſa-diameter $Aa = t$, (& Latus rectum l;) atq; in diametro conjugata $\delta\delta$, ſumantur a centro utrinq; æquales $C\alpha$, $C\alpha$; ſitq; tota $\alpha C\alpha = \tau = \sqrt{tl}$ (ut nempe ſit $t.\ l :: t^2.\ \tau^2$.) dicetur $\alpha C\alpha$ *tranſverſa-diameter conjugata*: Eâq; ſi deſcribantur Oppoſitæ Hyperbolæ, vertices habentes α, α, & Ordinatim-applicatas $\delta\omega$ diametro Aa parallelas, Latuſq; rectum $\lambda = \frac{t^2}{\tau}$, (ut nempe ſit $\tau.\ \lambda :: \tau^2.\ t^2$,) dicentur



oppoſiti vertices $\alpha\alpha$ ipſis Aa *vertices conjugati*; atq;

Hyperbolæ αα, ipſis A a, *Hyperbolæ conjugatæ*; commune cum illis centrum habentes, (ut patet.) Sed & eaſdem habebunt Aſymptotas rectas: ut jam demonſtraturus ſum.

Nam completo parallelogrammo MM, (cujus latera per conjugatos vertices tranſeant, ſintq; conjugatis diametris-tranſverſis parallela, & propterea æqualia;) erunt rectæ CM omnium Aſymptotæ; per prop. 39. (Idem accidet, ſi, ſumptis quibuſvis CD, Cδ, ipſis CA, Cα, proportionalibus, formetur parallelogrammum circa idem centrum C, latera habens conjugatis diametris parallela: Omnia enim puncta angularia, in Aſymptotis CM reperientur. Puta, ſi ordinatim-applicatæ, in hac Figura deſcriptæ, ad Aſymptotas uſq; continuarentur.)

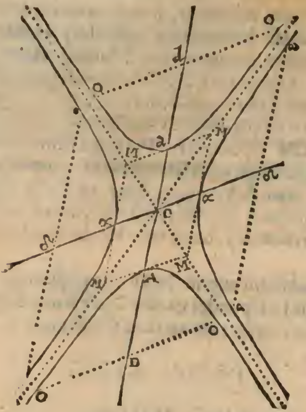
Præter illas autem Aſymptotas duas, nulla in eodem plano recta duci poteſt, quæ (producta) non alicui ex conjugatis Hyperbolis (productis) occurret. Ut ex prædictis facile eſt demonſtratu.

Parallelogrammum autem MM (per quatuor conjugatos vertices tranſiens) reſpondet parallelogrammo Ellipſi circumſcripto per ipſius conjugatos vertices tranſeunti.

PROP. XLIII.

De Syſtemate Hyperbolico.

QUatuor illæ, quas diximus, Hyperbolę conjugatę, reſpondent totidem (in Ellipſi) conjugatis ſectionibus Ellipticis (de quibus prop. 29. dictum eſt.) cum hoc tamen (inter alia) diſcrimine, quòd quatuor ſectiones Ellipticę, centrum verſus incurvatę ſe mutuò continuant; at conjugatę Hyperbolę, a centro recurvatę (partem convexam centrum verſus habentes) neq; ſibi invicem, neq ſuis Aſymptotis rectis, niſi poſt infinitam diſtantiam occurrunt, aut occurſuras eſſe ſupponuntur. Tota verò figura quæ contineri ſupponitur (aut ſupponi poſſit) quatuor convexis Hyperbolis, (ſibi mutuo, ut & Aſymptotis rectis, poſt infinitam diſtantiam concurrentibus,) toti figurę Ellipticę reſpondet.



Quatuor autem illas Hyperbolas conjugatas, infinitè continuatas, tandem concurſuras; ſuppono quidem, non quod vel reapſe concurrent, vel etiam actu poterunt infinitè continuari, (cum actu infinitum ejuſmodi dari non poſſit :) ſed quoniam qui alterum ſupponit ſupponere debet & reliquum. Multa autem apud Mathematicos ſupponi quæ actu non exiſtunt, ſat notum eſt; quæ veritatem habent *Conſequentiæ* (ut loquuntur) ſive Hypotheticam, licet non *Conſequentis* ſive Abſolutam.

Atq; hinc eſt, quod Polygonum regulare infinitorum laterum pro circulo haberi ſoleat; aliaq; ejuſmodi innumera : Et quidem univerſaliter, *Quantitates, quæ ita ad invicem continuo propius accedunt, ut earum (continuatarum) diſtantia quâlibet aſſignatâ*

mino;

minor evadat; ſupponendæ ſunt (in infinitum continuatæ) tandem convenire.

Quod quidem eodem modo demonſtrari poteſt quo 1ª Archimedis *de circuli dimenſione*, aliæq; paſſim apud Geometras demonſtrari ſolent. Nempe, ſi in infinitum continuentur; vel concurrent (quod affirmatur,) vel adhuc diſtabunt; at hoc eſt impoſſibile: Si enim diſtent, eſto ea diſtantia ſive differentia *a* quantumvis exigua, probari autem poteſt eas propius accedere quam eſt ea diſtantia aſſignata, (hoc enim ponitur:) non igitur diſtant; conveniunt ergo. Quod erat demonſtrandum.

Neq; poteſt quidem hæc demonſtratio quovis modo eludi, magis quàm illa Archimedis modò memorata, aliæq; apud Mathematicos innumeræ.

PROP. XLIV.

Ellipſeos & Hyperbolæ comparatio.

PAtet ex Ellipſeos & Hyperbolæ doctrinâ ſuperiùs traditâ; earum ad invicem cognationem magnam eſſe. Maximum autem inter eas diſcrimen (unde & reliqua omnia ortum ducunt) hoc eſt, Quod, *in Ellipſi, diameter tranſverſa atq; intercepta ſuper ſe mutuo replicari ſupponitur; in Hyperbola vero, ſe mutuo continuare.* Adeóq; in Ellipſi $Da = Aa - AD = t - d$; in Hyperbola vero $Da = Aa + AD = t + d$. Atq; hinc quidem Ellipſeos incurvatio verſus centrum, & Hyperbolæ recurvatio a centro, aliáq; omnia quæ interveniunt diſcrimina: ut probè attendenti patebit. Adeoq; totum ferè Ellipſeos doctrinam Hyperbolæ accommodavimus (conſulto quidem, ut earum cognatio melius percipiatur) totidem fere verbis, mutatis tantum ſignis + −.

Atq; hactenus Parabolæ, Ellipſeos, & Hyperbolæ doctrinam, ſuccinctè quidem, ſed & dilucidè tradidimus.

APPENDIX.

APPENDIX.

Tradidimus, in ſuperioribus, trium illarum (prout vulgò dicuntur) Coni-ſectionum, Parabolæ, Ellipſeos, *atq;* Hyperbolæ, *doctrinam, ſuccinctè ſatis, ſed & interim ſatis (ni fallor) dilucidè. Earumq; vel omnes vel præcipuas ſaltem affectiones vel demonſtravimus, vel ſaltem demonſtrationum fontes indicavimus; ut inde liceat levi negotio ea omnia deducere, quæ longis ambagibus, atq; perplexo variorum Lemmatum & demonſtrationum intricatarum labore antehac oſtendi conſueverunt.*

Atq; hæc omnia brevi admodum atq; ſuccincta methodo tradita ſunt; præſertim ſi omittantur ea omnia (quæ quidem tutò nec incommodè omitti poſſe videantur) quæ tota parte prima tradidimus; quæ quidem Conum ſpectant, atq; illarum ad conum relationem, cum quibus tamen præſens doctrina (quanquam ſecus olim creditum eſt) nullam habet neceſſariam connexionem; ſed ſimpliciùs atq; univerſalius tradi & poteſt & debet.

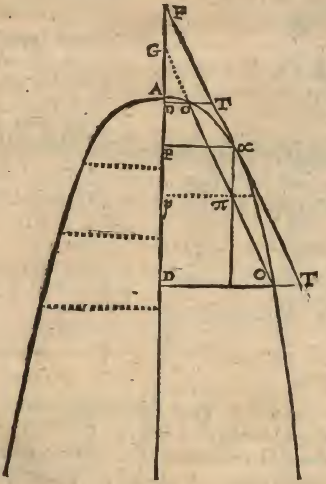
Sed interim viam ſimul apperuimus qua Curvarum doctrinam penitius intueri atq; ulterius promovere facilè poſſimus: (quod & nos fortaſſe deinceps aliquando, Deo favente, facturi ſumus, ſi illud neceſſe videbitur, atq; viris doctis Mathematum peritis labores noſtros gratos fore perſpiciemus.) Interim ſpecimen aliquod libet apponere, de curvis aliis Parabolæ affinibus, quarum Diametri, Ordinatim-applicatæ, Latera-recta, Tangentes, &c. non minus quàm in ipſâ Parabolâ reperiantur.

PROP.

PROP. XLV.

De Paraboloide Cubicali.

SI Paraboloides ita conſtituatur, ut Ordinatim-applicatas habeat in ſubtriplicatâ ratione Diametrorum-interceptarum; (adeóq; illarum Cubos diametris-interceptis proportionales:) *Paraboloides Cubicale* dici poterit.



Latus-rectum Paraboloidis cubicalis (puta l,) appello rectam imaginariam, cujus quadratum in diametrum-interceptam ductum, æquatur cubo Ordinatim-applicatæ. Ut ſit ubiq; $p^3 = l^2 d$.

PROP. XLVI.

De rectâ Paraboloides Cubicale contingente.

SI Paraboloides Cubicale Aα, in puncto quovis α, contingat recta αF, diametro PA occurrens in F, ſitq; eidem diametro ordinatim-applicata αP: erit recta AF (diametri continuatio) dupla diametri-interceptæ PA: hoc eſt, diameter continuata PF, tripla diametri PA.

Nam, ſumpto ubivis (in eâdem diametro) puncto D, cui ordinatim applicetur DO, tangenti αF occurrens in T: Punctum T (propter tangentem) vel erit idem cum puncto α, (ſi nempe P,D, coincidant:) vel (ſi ſecus) erit T extra curvam: & (propterea) DT $\geqslant$ DO (nempe æquales, ſi D, P, coincidant; vel, ſi ſecus, DT longior erit.)

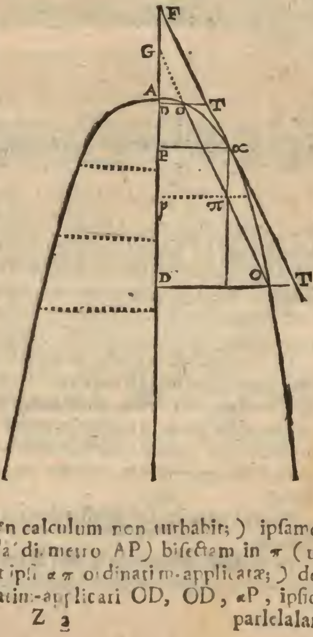
Ponamus autem (ob commodiorem calculum) $P\alpha = p$, PA $= d$, $PF = f$, $PD = a$. Erit ergo (per def. præced.) PA. DA :: Pαc. DOc. hoc eſt $d. d \pm a :: p^3. \frac{d \pm a}{d} p^3 =$ DOc. Item (propter ſimilia triangula) PF. Pα :: DF. DT. hoc eſt $f. p :: f \pm a. \frac{f \pm a}{f} p =$ DT. Ejuſq; cubus $\frac{f^3 \pm 3f^2a + 3fa^2 \pm a^3}{f^3} p^3$ (= DTc) $\geqslant$ (DOc =) $\frac{d \pm a}{d} p^3$ Et (utrinq; multiplicando per $f^3 d$, & dividendo per p^3) erit $f^3 d \pm 3f^2 da \pm 3fda^2 \pm da^3 \geqslant f3d \pm f^3 a$. Tum (auferendo utrinq; $f^3 d$, & dividendo per $\pm a$) erit $3f^2 d \pm 3fda \mp da^2 \geqslant f^3$. Deniq;, ponendo puncta PD coincidere, (ut evaneſcat quantitas a, adeóq; & ipſius multiplicia $\pm 3fda$, $\mp da^2$,) erit $3f^2 d = f^3$, hoc eſt $3d = f$. Quod erat demonſtrandum.

PROP.

PROP. XLVII.

De Paraboloidis Cubicalis Diametris.

IN Paraboloide Cubicali Diametri ſunt invicem parallelæ: Et cujuſvis diametri Ordinatim-applicatæ, ſunt rectæ in ipſius Vertice contingenti parallelę.



Demonſtratio facile inſtitui poterit ad imitationem illius quæ de Parabolâ adhibetur ad prop. 24. niſi quod PF, quæ iſtic dicitur $2d$, hic dicenda eſt $3d$. Eam nempe Analyticè ſic examinabimus. Supponamus ſcilicet rem ita eſſe ut perhibetur: Adeóq; rectam $F\alpha$, quæ parabolam $A\alpha$ in puncto α contingat, diametro PA productæ occurrere in F; eiq; parallelam OO parabolæ inſcriptam, quæ (producta) eidem diametro ſupra verticem occurrat in G, (adeóq; ſi infra verticem diametro occurrat, cum tam duarum DG, quam duarum DO, de quibus mox dicetur, altera erit quantitas negativa, quod tamen calculum non turbabit;) ipſamq; OO rectâ $\alpha\pi$ (parallelâ diametro AP) biſectam in π (ut nempe rectæ πO, πO, ſint ipſi $\alpha\pi$ ordinatim-applicatæ;) deniq; diametro AP ordinatim-applicari OD, OD, αP, ipſiq;

parlelalam

parallelam πp eidem diametro occurrere in p: quare & (propter parallelas) $Pp = \alpha\pi = FG$; & propterea $PF = pG$: item (propter parallelas) rectam DD biſectam in p, ſicut OO biſecatur in π. Quærendum autem eſt, numcubi reperiri poſſint puncta D, D; quæ quidem ſicubi inveniantur, conſtabit propoſitum.

Subſtitutis igitur idoneis ſymbolis, eſto $P\alpha = p$. $PA = d$. (ideóq;, per præced: $PF = pG = 3d$) $Pp = \alpha\pi = FG = g$. (ergo $pA = PA + Pp = d + g$.) $pD = q$. (ideoq; $DA = pA \pm pD = d + g \pm q$. & $DG = pG \pm pD = 3d \pm q$)

Erit igitur (propter Paraboloides cubicale per prop 45.) PA. DA :: Pαc. DOc. hoc eſt, $d.\ d + g \pm q :: p^3.\ \frac{d + g \pm q}{d} p^3 = DOc$.

Item (propter ſimilia triangula) PF. Pα :: DG. DO. hoc eſt, $3d.\ p :: 3d \pm q.\ \frac{3d \pm q}{3d} p = DO$. Ejuſque cubus

$$\frac{27d^3 \pm 27d^2q + 9dq^2 \pm q^3}{27d^3} p^3 = DOc = \frac{d + g \pm q}{d} p^3.$$

Ergo (utrinq; dividendo per p^3, & multiplicando per $27d^3$) erit $27d^3 \pm 27d^2q + 9dq^2 \pm q^3 = 27d^3 + 27d^2g \pm 27d^2q$. Et (ſublatis utrinq; æqualibus) $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$. Cujus quidem æquationis radix q, ſi vel ope Coniſectionis vel alio quovis modo reperiri poterit, monſtrabit quæſita puncta D, D, (alterum quidem ſupra punctum p, alterum infra;) adeóq; propoſiti veritatem.

Quo autem pacto ejuſmodi æquationes cubicæ reſolvi poterunt, non hujus loci eſt inquirere. Poteſt illud fieri vel methodo *Carteſiana*, vel juxta *Vietæ* exegeſin numeroſam, vel alia ſiquam alius quivis in poſterum magis accommodatam invenerit, methodo. Sufficit inſtituto noſtro ad eam æquationem rem perduxiſſe, quæ veram radicem negotio accommodam contineat.

Analyſi peractâ, Demonſtrationem ſyntheticam ſic licet inſtituere.

In Paraboloide cubicali Aα, diametro AP, parallela ducatur $\alpha\pi$: per cujus punctum quodvis (intra paraboloides) π, ducatur recta πG (diametro AP occurrens in G) parallela tangenti αF (quæ eidem diametro occurrit in F.) Dico $\alpha\pi$ ejuſdem Paraboloideos diametrum eſſe, eiq; ordinatim poſitam πG.

Diametro AP ordinatim-applicetur αP, eiq; parallela ducatur πp (eidem diametro occurrens in p.) Et ſunto ſymbola $P\alpha = p$. $PA = d$. $FG = \alpha\pi = Pp = g$.

Tum ſumantur in diametro, utrinq; a puncto p, æquales rectæ $pD = pD = q$; utraq; nempe tanta, quanta eſt radix hujus æquationis $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$. Et punctis D, D, ordinatim ponantur rectæ DO, DO, rectæ πG occurrentes in O, O: quæ cum parallelæ ſint rectæ πp, ſicut recta DD (ex conſtructione) biſecatur in p, erit ideo OO (propter parallelas) biſecta in π.

Supereſt igitur ut oſtendam rectam OO (biſectam in π) Paraboloidi inſcriptam eſſe (ut nempe $\alpha\pi$ recta biſecans ſit diameter) hoc eſt, puncta O, O, eſſe in Paraboloideos curva; nempe rectas DO, DO, (diametro AP ordinatim-poſitas, ex conſtructione,) ordinatim-applicatis (ad eadem diametri puncta) æquales eſſe, adeoq; in curva terminari. Quod ſic oſtenditur.

Eſt $pA = PA + Pp = d + g$. $DA = pA \pm pD = d + g \pm q$. $pG = PF = 3d$. $DG = pG \pm pD = 3d \pm q$.

Tum (propter Paraboloides cubicale) ut PA, ad DA; ſic cubus rectæ $P\alpha$ puncto P ordinatim-applicatæ, ad cubum ordinatim-applicatæ puncto D. hoc eſt $d.\ d + g \pm q :: p^3.\ \frac{d + g \pm q}{d}p^3$. qui igitur cubus eſt ordinatim-applicatæ puncto D.

Sed & tantundem eſt cubus rectæ DO. Nam (propter ſimilia triangula) PF. $P\alpha$ :: DG. DO. hoc eſt $3d.\ p :: 3d \pm q.\ \frac{3d \pm q}{3d}p = DO$. Ejuſq; cubus $DOc = \frac{27d^3 \pm 27d^2q + 9dq^2 \pm q^3}{27d^3}p^3$. Vel (pro $9dq^2 \pm q^3$, ſubſtituendo $27d^2g$, quæ per conſtructionem ſunt æqualia,) $\frac{27d^3 \pm 27d^2q + 27d^2g}{27d^3}p^3$, vel deniq; (abbreviando fractionem per $27d^2$) $\frac{d \pm q + g}{d}p^3 = DOc$. adeoq; rectæ DO, DO, ordinatim-applicatæ ſunt punctis D, D, ad Paraboloideos curvam terminatæ in O, O;

&

& propterea rectam OO parabolæ inſcriptam eſſe, ad diametrum *απ* ordinatim-poſitam. Quod erat demonſtrandum.

PROP. XLVIII.

De Areâ Paraboloidis;& Conoidis Pyramidoidiſve illi accommodati.

UT Archimedes (in lib. de *Quadratura Parabolæ*) oſtendit Parabolam (figuram putà lineâ Parabolica & rectâ contentam) eſſe ad Triangulum (ſuper eâdem vel æquali baſe æquè-altum) ut 4 ad 3: Sic & demonſtrari poteſt, Pyramidoides cubicale ad Triangulum (intellige, ſuper eâdem baſe æque-altum) eſſe ut 3 ad 2.

Item, ut Conoides Parabolicum ad Cylindrum (vel Pyramidoides Parabolicum ad Priſma) eſt ut 1 ad 2: Sic demonſtrari poteſt, Conoides a Paraboloide Cubicali ortum ad Cylindrum (vel ejuſmodi Pyramidoides ad Priſma) eſſe ut 3 ad 5.

Hæc autem alibi (Deo volente) inter ejuſmodi alia multa aliquando ſumus demonſtraturi Atq; inſuper generalem methodum tradituri, quâ Paraboloidea quælibet ad Quadrata, & eorum Conoidea ſeu Pyramidoidea ad Cylindros aut Priſmata reduci poſſint non minus quàm ipſa parabola aut Conoides Parabolicum rectum, (quod & de Conoidibus & Pyramidoidibus Ellipticis & Hyperbolicis, ſive rectis ſive ſcalenis, intelligendum eſſe volo:) Quæ nemo, quod ſciam, antehac aggreſſus eſt.

PROP. XLIX.

De Paraboloidibus aliis.

SI Paraboloides Ordinatim-applicatas habeat in Diametrorum-interceptarum ratione ſubquadruplicatâ, vel ſubquintuplicatâ, &c; (in quibus

bus nempe Diametri-interceptæ ſunt Ordinatim-applicatarum biquadratis, vel ſurdeſolidis,&c, proportionales:) dici poterit *Paraboloides Biquadraticale*, vel *Surdeſolidale*,&c; (nomine nempe rationi aptato.)

Latus-rectum ejuſmodi Paraboloidibus convenieens, appello rectam imaginariam ; cujus, in Biquadraticalibus, Cubus in diametrum-interceptam ductus æquatur Biquadrato Ordinatim-applicatæ; in ſurdeſolidalibus, Biquadratum in diametrum-interceptam ductum æquatur Surdeſolido Ordinatim-applicatæ: (&ſimiliter in aliis Paraboloidibus, reſpectu ſemper habito ad gradum Paraboloideos.) Ut ſit (prout gradus poſtulaverit) $p^4 = dl^3$, vel $p^5 = dl^4$, & ſic deinceps.

Habent autem & hæc Paraboloidea Diametros invicem parallelas; earúmq; Ordinatim-applicatas parallelas Tangenti in (ſuæ cujuſlibet) diametri vertice.

Recta verò AF (diametri continuatio inter verticem & tangentem intercepta) eſt, in Paraboloide Biquadraticali tripla, in ſurdeſolidali quadrupla, diametri interceptæ PA : (& ſimiliter in aliis:) Hoc eſt, continuata diameter PF (applicationis puncto & Tangentis concurſu intercepta,) eſt ad Diametri-interceptæ PA, in Biquadraticali quadrupla, in Surdeſolidali quintupla; & ſic deinceps.

Demonſtratio pari modo procedet atq; in Paraboloide Cubicali; aut etiam ipſâ Parabolâ.

Adeo ut jam Paraboloidis Cubicalis, Biquadraticalis, ſurdeſolidalis, aut alius cujuſvis, doctrina, non minus cognita habeatur, quàm ipſius Parabolæ.

Si tamen, poſt ſpecimen hoc exhibitum, operæ pretium cenſebitur rem hanc fuſiùs proſequi, poterit illud a quolibet facillimè fieri cui tantum ſuppetit otii.

PROP. L.

De Elliptoidibus & Hyperboloidibus.

DE Elliptoidibus & Hyperboloidibus (pariter atq; Paraboloidibus) in promptu erat nonnulla adjeciſſe; niſi quod eorum tractatio aliquantò intricatior eſſet, adeóq; fuſius tradenda, quam brevi appendiculo conveniret.

Sufficiat igitur (ſpecimine in Paraboloidibus exhibito) vel anſam aliis porrexiſſe, vel id ipſum forſan peculiari tractatu poſthac præſtiturum eſſe.

Interim, negotium a me primitus ſuſceptum, me ſatis præſtitiſſe non diffido.

LAUS DEO.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

I

liq
qua

S
anſ
poſ
I
ſiti

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Digitized by Google